

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2005. október 25.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTERIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
a)		
Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a köré írt kör középpontja.	1 pont	
A köré írt kör egyenlete átalakítva: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$.	1 pont	
Ebből az oldalfelező merőlegesek metszéspontja: $O(3; 2)$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	
b)		
A C pont illeszkedik az y tengelyre, ezért ha c jelöli a C pont második koordinátáját, akkor $C(0; c)$.	1 pont	
C illeszkedik a körre, ezért $(-3)^2 + (c-2)^2 = 25$, tehát $(c-2)^2 = 16$.	1 pont	
Ebből $c_1 = 6, c_2 = -2$, azaz a C csúcsra két lehetőség van: $C_1(0; 6), C_2(0; -2)$.	2 pont	
Az ABC_1 háromszög súlypontja: $S_1\left(\frac{8-1+0}{3}; \frac{2+5+6}{3}\right) = S_1\left(\frac{7}{3}; \frac{13}{3}\right)$.	2 pont	
Az ABC_2 háromszög súlypontja: $S_2\left(\frac{8-1+0}{3}; \frac{2+5-2}{3}\right) = S_2\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$.	2 pont	<i>Egy megoldás megtalálása esetén összesen legfeljebb 5 pont adható.</i>
Összesen:	8 pont	

2.		
a)		
A kézfogások száma: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.	3 pont	<i>Ez a pontszám nem bontható.</i>
Összesen:	3 pont	
b)		
Mivel Dani és Ernő együtt érkezett, ezért négy különböző időpontban érkezhettek. A lehetséges érkezési sorrendek száma: $4!(=24)$.	3 pont	<i>5! válasz esetén 1 pont adható.</i>
Összesen:	3 pont	
c)		
Minden mérkőzés során egy fiú pihen, ezért a pályán levő négy játékosra 5 lehetőség van.	1 pont	
A pályán lévő négy fiúból kettő kiválasztására $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség van.	2 pont	

Viszont ekkor minden mérkőzést kétszer számolunk, így rögzített pihenő fiú esetén három különböző teniszparti lehetséges.	2 pont	
Ezek alapján a különböző lehetséges páros mérkőzések száma: $5 \cdot 3 = 15$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

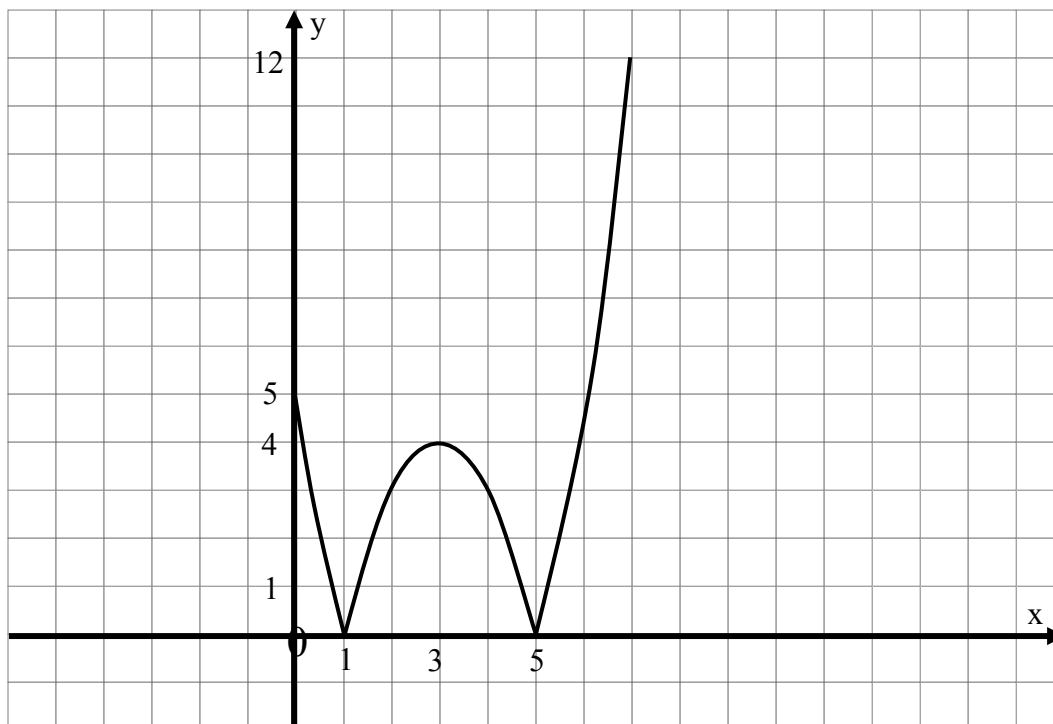
3.		
a)		
A nagypapa kilenc alkalommal tett pénzt a perselybe. A Péter által kapott összeg egy olyan számtani sorozat első 9 elemének összege, amelynek első eleme 5000, differenciája 1000.	2 pont	
A kérdéses összeg: $\frac{9}{2} \cdot (2 \cdot 5000 + (9 - 1) \cdot 1000) = 81000.$ Péter <u>81000 Ft-ot</u> kapott.	3 pont	
Összesen:	5 pont	
b)		
$t_0 = 60000$, $t_n = t_0 \cdot 1,04^n = 60000 \cdot 1,04^n$, ahol $n \in \mathbf{Z}^+$.	2 pont	
A feltétel szerint $60000 \cdot 1,04^n \geq 100000$.	2 pont	
Osszuk mindkét oldalt 60000-rel, majd vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát: $\lg 1,04^n \geq \lg \frac{5}{3}.$	3 pont	
Innen $n \geq \frac{\lg \frac{5}{3}}{\lg 1,04} \approx 13,024 > 13$, ami azt jelenti, hogy legalább 14 évet kell Péternek várnia.	2 pont	<i>Az utolsó 2 pont helyett 1 pont jár, ha 13 évet írt a vizsgázó.</i>
Összesen:	9 pont	

4.

a)

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x - 3)^2 - 4|.$$

1 pont



Ábrázolás.

3 pont

Ha a vizsgázó nem jól veszi figyelembe az értelmezési tartományt, akkor legfeljebb 2 pont adható az ábrázolásra.

Összesen:

4 pont

b)

f értékkészlete: $[0; 12]$

2 pont

Ha hibás grafikonról, annak megfelelően helyes értékkészletet ad meg a vizsgázó, akkor is jár a 2 pont.

Összesen:

2 pont

c)

A lehetséges megoldások száma a grafikonról leolvasható.

1 pont

Annak a felismeréséért, hogy a megoldások száma p és a függvény értékkészletének viszonyától függ.

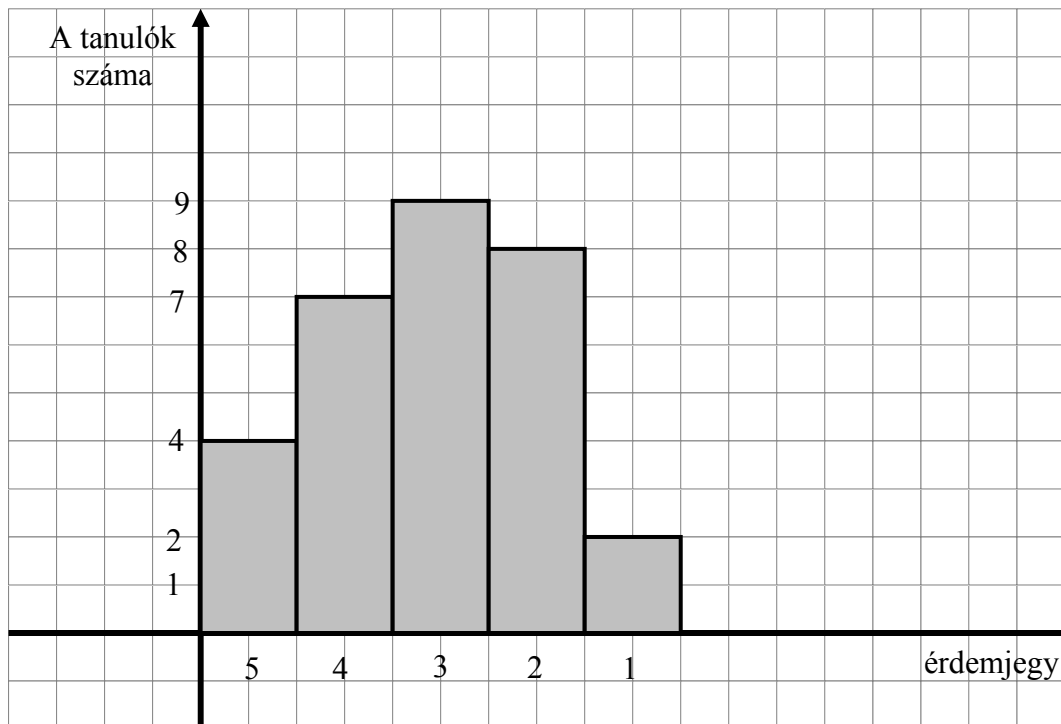
Ha $p < 0$, akkor nincs megoldás.	1 pont	<i>Ha algebrai megoldás során adódnak a jó megoldások, a megfelelő pontszámok akkor is járnak. Ha rossz grafikon alapján egy másik egyenletet vizsgál jól a vizsgázó, akkor legfeljebb 4 pont adható.</i>
Ha $p = 0$, akkor 2 megoldás van.	1 pont	
Ha $0 < p < 4$, akkor 4 megoldás van.	1 pont	
Ha $p = 4$, akkor 3 megoldás van.	1 pont	
Ha $4 < p \leq 5$, akkor 2 megoldás van.	1 pont	
Ha $5 < p \leq 12$, akkor 1 megoldás van.	1 pont	
Ha $12 < p$, akkor nincs megoldás.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

II.

5.		
A logaritmus miatt x és y 1-től különböző pozitív számok lehetnek.	1 pont	
Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk a logaritmus azonosságainak felhasználásával. $\log_x(x^2 y^3) + \log_y(x^3 y) =$ $= 2 + 3\log_x y + 3\log_y x + 1 =$ $= 3 + 3(\log_x y + \log_y x)$	3 pont	
Így az első egyenlet: $\log_x y + \log_y x = 2$.	1 pont	
A $\log_x y$ és a $\log_y x$ egymás reciprocai, és összegük 2.	2 pont	<i>Ha a kapott egyenletben közös alapra hoz a vizsgázó, és egy másodfokúra visszavezethető egyenletből kapja, hogy $x = y$, a 4 pont természetesen akkor is jár.</i>
Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkettő 1-gyel egyenlő, amiből kapjuk, hogy $x=y$.	2 pont	
Beírva ezt a második egyenletbe: $\cos 2x + \cos 0 = 0$, ahonnan $\cos 2x = -1$.	2 pont	
Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2x = \pi + 2k\pi$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	3 pont	<i>Ha x megfelelő értékeit fokokban vagy periódus nélkül vagy rossz periódussal adja meg a vizsgázó, akkor legfeljebb 1 pont adható.</i>
Összevetve az $x, y > 0, \neq 1$ feltétellel, $x = y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{N}$.	2 pont	
Összesen:	16 pont	

6.

a)



Mindegy melyik érdemjegy oszlopával kezdi a vizsgázó az ábrázolást, és természetesen a diagramon az egyes oszlopok százalékos megjelenítése is jó.

Jó ábrázolás oszlopdiagramon.

3 pont

Összesen: 3 pont

b)

A jegyek átlaga: $\frac{4 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{30} = 3,1$.

2 pont

Összesen: 2 pont

c)

Legalább 3-ast $4 + 7 + 9 = 20$ tanuló kapott, így a kérdéses valószínűség:

$$P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

3 pont

Összesen: 3 pont

d)

Az osztályból 2 tanuló kiválasztására $\binom{30}{2} = 435$

2 pont

lehetőségünk van.

A kiválasztott tanulók osztályzatainak összege 3-mal osztható, ha az osztályzatok:

(1; 2), (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 5).

2 pont

A kedvező esetek száma így:

$$2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 8 \cdot 7 + \binom{9}{2} + 7 \cdot 4 = 144.$$

2 pont

A keresett valószínűség: $P = \frac{144}{435} = \frac{48}{145} \approx 0,33$.	2 pont	
Összesen:	8 pont	

7. (azaz, a feladatlap 14. oldalán lévő 6. feladat)

a)

A kapott alakzat egy csonkakúp, magassága LM, az alapkörök sugarai KL és MN.

1 pont

A csonkakúp térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \approx 13326,47 \text{ térfogategység} .$$

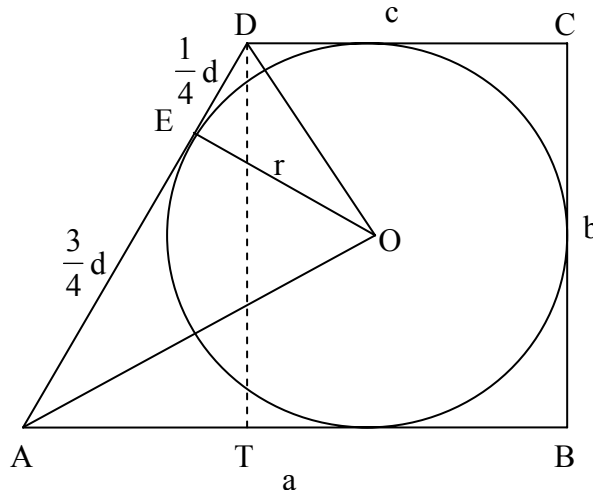
3 pont

Összesen:

4 pont

b)

Legyen $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. A beírt kör sugara r , középpontja O , az AD oldallal vett érintési pontja E . A D -ből induló magasság talppontja az AB oldalon T .



A feltételek alapján $a + c = b + d = 20$ és $b = 2r$.

2 pont

Mivel a trapéz szárain fekvő szögek összege 180° , és O a belső szögfelezők metszéspontja, ezért az AOD háromszög derékszögű, a derékszög O -ban van.

2 pont

Ennek a derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága éppen az OE sugár, ezért a magasságtétel és a feltétel alapján

2 pont

$$r^2 = \frac{3d^2}{16}, \text{ ahonnan } r = \frac{d\sqrt{3}}{4} .$$

Így viszont $b = 2r = \frac{d\sqrt{3}}{2}$, amiből adódik, hogy a TDA háromszög egy szabályos háromszög fele.

2 pont

Ebből következik, hogy $a = c + \frac{d}{2}$.

$$d + \frac{d\sqrt{3}}{2} = 20, \text{ ahonnan}$$

1 pont

$d = \frac{40}{2 + \sqrt{3}} = 40(2 - \sqrt{3}) \approx 10,72.$		
$b = \frac{d\sqrt{3}}{2} = 20(2\sqrt{3} - 3) \approx 9,28.$	1 pont	
$a + c = 2c + \frac{d}{2} = 20$, ebből $c = 10(\sqrt{3} - 1) \approx 7,32.$	1 pont	
$a = 20 - c = 10(3 - \sqrt{3}) \approx 12,68.$	1 pont	
Összesen:	12 pont	

8.		
a)		
Ha az első kiránduláson az osztály 60%-a vett részt, akkor csak a második és harmadik kiránduláson az osztály 40%-a. Hasonlóan adódik, hogy csak az első és harmadik kiránduláson az osztály 30%-a, csak az első és második kiránduláson az osztály 20%-a vett részt.	3 pont	
Mivel nem volt olyan tanuló, aki csak egy kiránduláson vett volna részt, ezért az osztály 10%-a vett részt minden kiránduláson.	2 pont	
Az előző megállapítás és a feltétel alapján az osztály létszáma 30.	1 pont	
Összesen:	6 pont	
Algebrai megoldás: <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>II.</p> <p>I. III.</p> </div> <div> $x + y + 3 = 0,6 (3 + x + y + z)$ $y + z + 3 = 0,7 (3 + x + y + z)$ $z + x + 3 = 0,8 (3 + x + y + z)$ $4x + 4y - 6z = -12$ $-7x + 3y + 3z = -9$ $2x - 8y + 2z = -6$ </div> </div>	3 pont	<i>Az egyenletrendszer felállításáért</i>
$x - y = 3$ $2x - 3y = 0$	1 pont	<i>Kétismeretlenes egyenletrendszerért</i>
$x = 9; y = 6; z = 12$	1 pont	
Az osztálylétszám $6 + 9 + 12 + 3 = 30$ fő	1 pont	
Összesen:	6 pont	
b)		
Ha minden tanuló legfeljebb két mérkőzést játszott volna, akkor eddig 10 mérkőzés zajlott volna le.	2 pont	
Mivel 11 mérkőzés volt, ezért a skatulya-elv alapján lennie kell olyan tanulónak, aki három mérkőzést játszott	2 pont	
Összesen:	4 pont	

c)		
A második kiránduláson 21 tanuló volt.	1 pont	
Jelölje a kiránduláson résztvevők átlagmagasságát \bar{h} . Ezzel a feltételek alapján: $174,3 = \frac{21 \cdot \bar{h} + 9 \cdot 182}{30},$	3 pont	
ahonnan $\bar{h} = 171$ cm.	2 pont	
Összesen:	6 pont	

9. (1. megoldás)		
Jelölje a az eredeti kocka élhosszát, b pedig a 99., nem egységkocka élhosszát centiméterben mérve. A feltételek alapján a és b pozitív egészek, és $98 = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.	3 pont	
Mivel $98 = 2 \cdot 7^2$ és $a - b < a^2 + ab + b^2$, ezért három eset lehetséges:	2 pont	
I. $a - b = 1$ és $a^2 + ab + b^2 = 98$. Ekkor $a = b + 1$ helyettesítéssel a második egyenletből adódik, hogy $3b^2 + 3b = 97$, ami nem lehet, hiszen a 3 nem osztója a 97-nek.	3 pont	
II. $a - b = 2$ és $a^2 + ab + b^2 = 49$. Ekkor $b^2 + 2b = 15$, ahonnan a feltételeknek megfelelő megoldás $b = 3, a = 5$.	3 pont	
III. $a - b = 7$ és $a^2 + ab + b^2 = 14$. Ekkor $3b^2 + 21b = -35$, ami nem lehetséges, ugyanis a b pozitív egész szám.	3 pont	<i>Jó indoklás az is, hogy -35 nem osztható 3-mal.</i>
Azt kaptuk, hogy az eredeti kocka éle 5 cm, így a térfogata 125 cm^3 .	2 pont	
Összesen:	16 pont	

9. (2. megoldás)		
$\left. \begin{array}{l} a^3 - b^3 = 98 \\ b > 1 \end{array} \right\}$	2 pont	
Ebből következik, hogy $\sqrt[3]{98} < a$ és $a \in \mathbf{N}$.	3 pont	
Tehát $5 \leq a$.	2 pont	
Mivel $a \geq b + 1$, ezért $a^3 - (a - 1)^3 \leq 98$,	2 pont	
és mivel $7^3 - 6^3 = 127 > 98$ miatt $a < 7$,	2 pont	<i>A másodfokú egyenlőtlenség megoldásával is eljuthat a helyes értékekhez.</i>
így $a = 5$ vagy $a = 6$.	2 pont	
$a = 5$ esetén $b = 3$, ami megfelel a feltételeknek.	1 pont	
$a = 6$ esetén $b^3 = 118$, ami nem köbszám, nem megoldás.	1 pont	
Tehát a kocka térfogata: 125 cm^3 .	1 pont	
Összesen:	16 pont	