ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2005. október 25.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

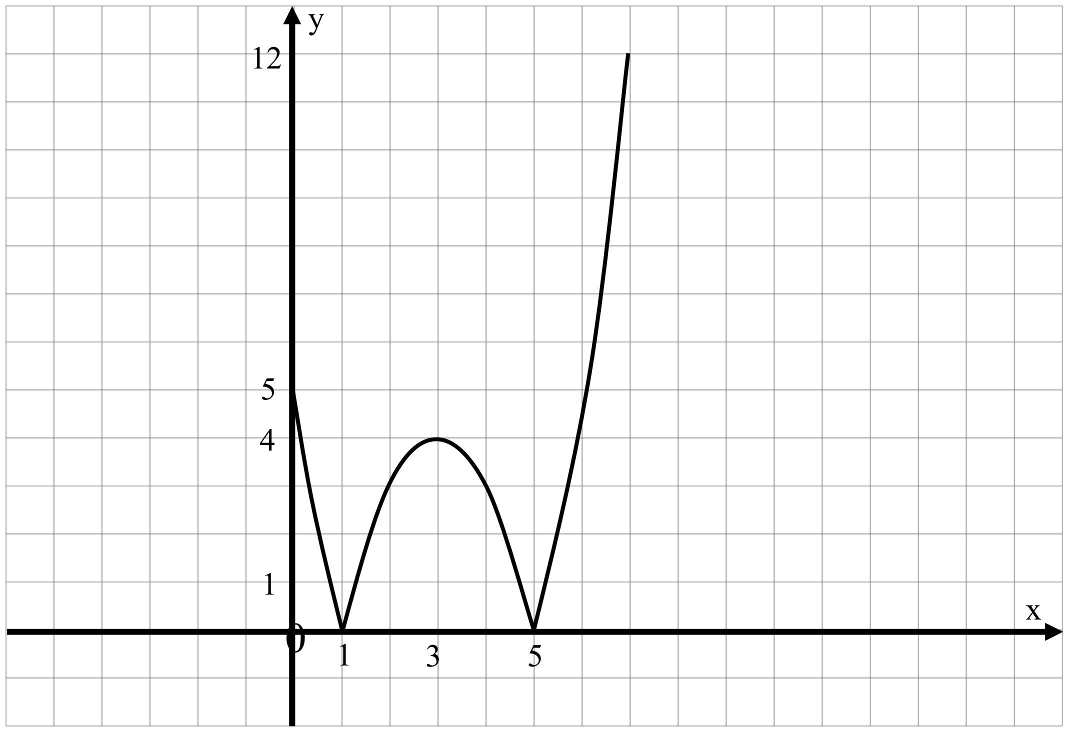
1.		
a)		
Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a köré írt kör középpontja.	1 pont	
A köré írt kör egyenlete átalakítva: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$.	1 pont	
Ebből az oldalfelező merőlegesek metszéspontja: $O(3; 2)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	
b)		
A C pont illeszkedik az y tengelyre, ezért ha c jelöli a C pont második koordinátáját, akkor $C(0; c)$.	1 pont	
C illeszkedik a körre, ezért $(-3)^2+(c-2)^2=25$, tehát $(c-2)^2=16$.	1 pont	
Ebből $c_1=6, c_2=-2$, azaz a C csúcsra két lehetőség van: $C_1(0;6),\ C_2(0;-2)$.	2 pont	
Az ABC_1 háromszög súlypontja: $S_1\left(\frac{8-1+0}{3};\frac{2+5+6}{3}\right)=S_1\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)$.	2 pont	
Az ABC_2 háromszög súlypontja: $S_2\left(\frac{8-1+0}{3};\frac{2+5-2}{3}\right)=S_2\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$.	2 pont	*Egy megoldás megtalálása esetén összesen legfeljebb 5 pont adható.*
Összesen:	**8 pont**	

2.		
a)		
A kézfogások száma: $\frac{5\cdot 4}{2}=10$.	3 pont	*Ez a pontszám nem bontható.*
Összesen:	**3 pont**	
b)		
Mivel Dani és Ernő együtt érkezett, ezért négy különböző időpontban érkezhettek. A lehetséges érkezési sorrendek száma: 4!(=24).	3 pont	*5! válasz esetén 1 pont adható.*
Összesen:	**3 pont**	
c)		
Minden mérkőzés során egy fiú pihen, ezért a pályán levő négy játékosra 5 lehetőség van.	1 pont	
A pályán lévő négy fiúból kettő kiválasztására $\binom{4}{2}=6$ lehetőség van.	2 pont	

Viszont ekkor minden mérkőzést kétszer számolunk, így rögzített pihenő fiú esetén három különböző teniszparti lehetséges.	2 pont	
Ezek alapján a különböző lehetséges páros mérkőzések száma: $5 \cdot 3 = 15$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3.		
a)		
A nagypapa kilenc alkalommal tett pénzt a perselybe. A Péter által kapott összeg egy olyan számtani sorozat első 9 elemének összege, amelynek első eleme 5000, differenciája 1000.	2 pont	
A kérdéses összeg: $\frac{9}{2} \cdot \left(2 \cdot 5000 + (9-1) \cdot 1000\right) = 81000$. Péter 81000 Ft-ot kapott.	3 pont	
Összesen:	**5 pont**	
b)		
$t_0 = 60000$, $t_n = t_0 \cdot 1{,}04^n = 60000 \cdot 1{,}04^n$, ahol $n \in \mathbf{Z}^+$.	2 pont	
A feltétel szerint $60000 \cdot 1{,}04^n \geq 100000$.	2 pont	
Osszuk mindkét oldalt 60000-rel, majd vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát: $\lg 1{,}04^n \geq \lg \frac{5}{3}$.	3 pont	
Innen $n \geq \frac{\lg \frac{5}{3}}{\lg 1{,}04} \approx 13{,}024 > 13$, ami azt jelenti, hogy legalább 14 évet kell Péternek várnia.	2 pont	*Az utolsó 2 pont helyett 1 pont jár, ha 13 évet írt a vizsgázó.*
Összesen:	**9 pont**	

4.		
a)		
$f(x)=\left\|x^2-6x+5\right\|=\left\|(x-3)^2-4\right\|.$	1 pont	



Ábrázolás.	3 pont	*Ha a vizsgázó nem jól veszi figyelembe az értelmezési tartományt, akkor legfeljebb 2 pont adható az ábrázolásra.*
Összesen:	**4 pont**	
b)		
f értékkészlete: $[0;12]$	2 pont	*Ha hibás grafikonról, annak megfelelően helyes értékkészletet ad meg a vizsgázó, akkor is jár a 2 pont.*
Összesen:	**2 pont**	
c)		
A lehetséges megoldások száma a grafikonról leolvasható.	1 pont	*Annak a felismeréséért, hogy a megoldások száma p és a függvény értékkészletének viszonyától függ.*

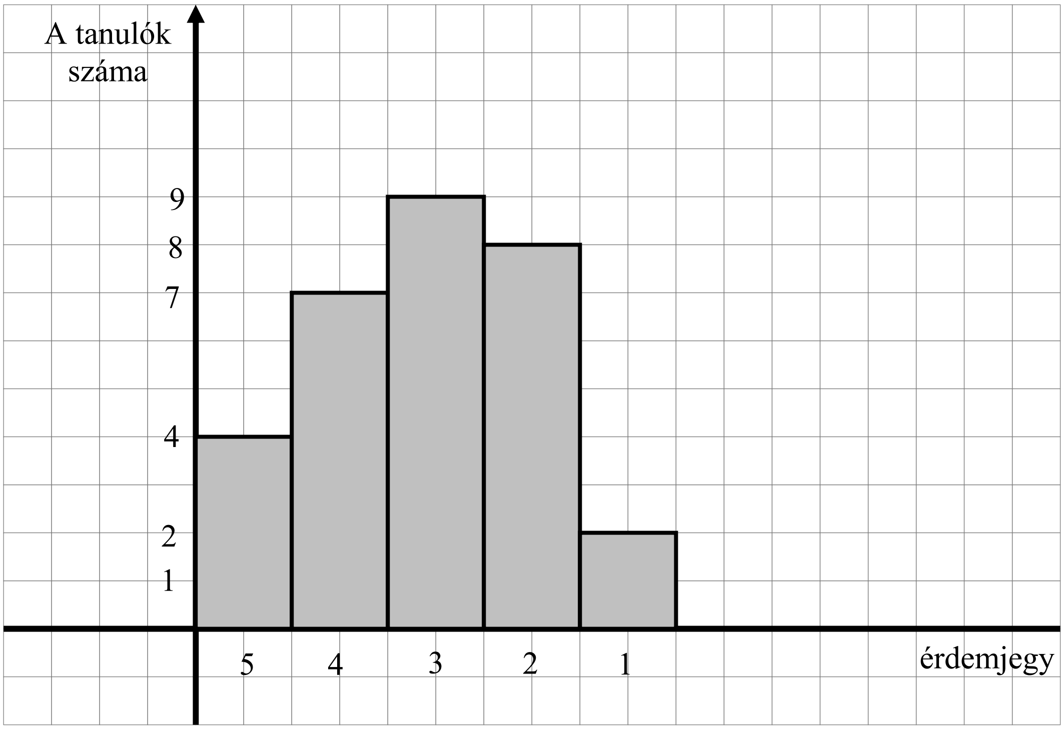
Ha $p < 0$, akkor nincs megoldás.	1 pont	*Ha algebrai megoldás során adódnak a jó megoldások, a megfelelő pontszámok akkor is járnak. Ha rossz grafikon alapján egy másik egyenletet vizsgál jól a vizsgázó, akkor legfeljebb 4 pont adható.*
Ha $p = 0$, akkor 2 megoldás van.	1 pont	
Ha $0 < p < 4$, akkor 4 megoldás van.	1 pont	
Ha $p = 4$, akkor 3 megoldás van.	1 pont	
Ha $4 < p \leq 5$, akkor 2 megoldás van.	1 pont	
Ha $5 < p \leq 12$, akkor 1 megoldás van.	1 pont	
Ha $12 < p$, akkor nincs megoldás.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

II.

5.		
A logaritmus miatt x és y 1-től különböző pozitív számok lehetnek.	1 pont	
Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk a logaritmus azonosságainak felhasználásával. $\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)=$ $=2+3\log_x y+3\log_y x+1=$ $=3+3\left(\log_x y+\log_y x\right)$	3 pont	
Így az első egyenlet: $\log_x y+\log_y x=2$.	1 pont	
A $\log_x y$ és a $\log_y x$ egymás reciprokai, és összegük 2.	2 pont	*Ha a kapott egyenletben közös alapra hoz a vizsgázó, és egy másodfokúra visszavezethető egyenletből kapja, hogy x = y, a 4 pont természetesen akkor is jár.*
Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkettő 1-gyel egyenlő, amiből kapjuk, hogy x=y.	2 pont	
Beírva ezt a második egyenletbe: $\cos 2x+\cos 0=0$, ahonnan $\cos 2x=-1$.	2 pont	
Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2x=\pi+2k\pi$, azaz $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$.	3 pont	*Ha x megfelelő értékeit fokokban vagy periódus nélkül vagy rossz periódussal adja meg a vizsgázó, akkor legfeljebb 1 pont adható.*
Összevetve az x, y>0, $\neq$ 1 feltétellel, $x=y=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{N}$.	2 pont	
Összesen:	**16 pont**	

6.

a)



Mindegy melyik érdemjegy oszlopával kezdi a vizsgázó az ábrázolást, és természetesen a diagramon az egyes oszlopok százalékos megjelenítése is jó.

Jó ábrázolás oszlopdiagramon.	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

b)

A jegyek átlaga: $\frac{4\cdot 5+7\cdot 4+9\cdot 3+8\cdot 2+2\cdot 1}{30}=3{,}1$.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

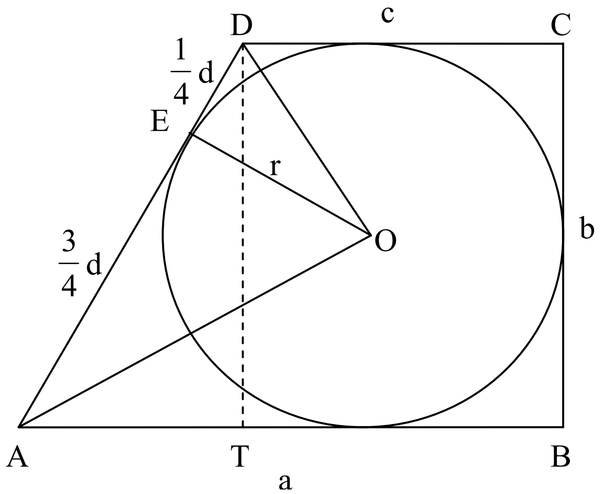
c)

Legalább 3-ast $4+7+9=20$ tanuló kapott, így a kérdéses valószínűség: $P=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

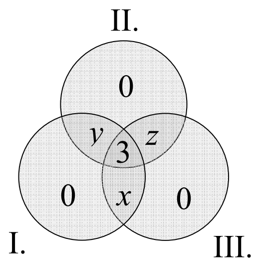
d)

Az osztályból 2 tanuló kiválasztására $\binom{30}{2}=435$ lehetőségünk van.	2 pont	
A kiválasztott tanulók osztályzatainak összege 3-mal osztható, ha az osztályzatok: (1; 2), (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 5).	2 pont	
A kedvező esetek száma így: $2\cdot 8+2\cdot 4+8\cdot 7+\binom{9}{2}+7\cdot 4=144$.	2 pont	

A keresett valószínűség: $P = \frac{144}{435} = \frac{48}{145} \approx 0{,}33$.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. (azaz, a feladatlap 14. oldalán lévő 6. feladat)		
a)		
A kapott alakzat egy csonkakúp, magassága LM, az alapkörök sugarai KL és MN.	1 pont	
A csonkakúp térfogata: $V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + r^2 + Rr\right) \approx 13326{,}47 \textit{térfogategység}$.	3 pont	
Összesen:	**4 pont**	
b)		
Legyen $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. A beírt kör sugara *r*, középpontja *O*, az *AD* oldallal vett érintési pontja *E*. A *D*-ből induló magasság talppontja az *AB* oldalon *T*.		
		
A feltételek alapján $a + c = b + d = 20$ és $b = 2r$.	2 pont	
Mivel a trapéz szárain fekvő szögek összege 180º, és *O* a belső szögfelezők metszéspontja, ezért az *AOD* háromszög derékszögű, a derékszög *O*-ban van.	2 pont	
Ennek a derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága éppen az *OE* sugár, ezért a magasságtétel és a feltétel alapján $r^2 = \frac{3d^2}{16}$, ahonnan $r = \frac{d\sqrt{3}}{4}$.	2 pont	
Így viszont $b = 2r = \frac{d\sqrt{3}}{2}$, amiből adódik, hogy a *TDA* háromszög egy szabályos háromszög fele. Ebből következik, hogy $a = c + \frac{d}{2}$.	2 pont	
$d + \frac{d\sqrt{3}}{2} = 20$, ahonnan	1 pont	

$d=\dfrac{40}{2+\sqrt{3}}=40\left(2-\sqrt{3}\right)\approx 10{,}72$.		
$b=\dfrac{d\sqrt{3}}{2}=20\left(2\sqrt{3}-3\right)\approx 9{,}28$.	1 pont	
$a+c=2c+\dfrac{d}{2}=20$, ebből $c=10\left(\sqrt{3}-1\right)\approx 7{,}32$.	1 pont	
$a=20-c=10\left(3-\sqrt{3}\right)\approx 12{,}68$.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

8.		
a)		
Ha az első kiránduláson az osztály 60%-a vett részt, akkor csak a második és harmadik kiránduláson az osztály 40%-a. Hasonlóan adódik, hogy csak az első és harmadik kiránduláson az osztály 30%-a, csak az első és második kiránduláson az osztály 20%-a vett részt.	3 pont	
Mivel nem volt olyan tanuló, aki csak egy kiránduláson vett volna részt, ezért az osztály 10%-a vett részt minden kiránduláson.	2 pont	
Az előző megállapítás és a feltétel alapján az osztály létszáma 30.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
Algebrai megoldás:  $x+y+3=0{,}6\ (3+x+y+z)$ $y+z+3=0{,}7\ (3+x+y+z)$ $z+x+3=0{,}8\ (3+x+y+z)$ $4x+4y-6z=-12$ $-7x+3y+3z=-9$ $2x-8y+2z=-6$	3 pont	*Az egyenletrendszer felállításáért*
$x-y=3$ $2x-3y=0$	1 pont	*Kétismeretlenes egyenletrendszerért*
$x=9$; $y=6$; $z=12$	1 pont	
Az osztálylétszám $6+9+12+3=30$ fő	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
b)		
Ha minden tanuló legfeljebb két mérkőzést játszott volna, akkor eddig 10 mérkőzés zajlott volna le.	2 pont	
Mivel 11 mérkőzés volt, ezért a skatulya-elv alapján lennie kell olyan tanulónak, aki három mérkőzést játszott	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

c)		
A második kiránduláson 21 tanuló volt.	1 pont	
Jelölje a kiránduláson résztvevők átlagmagasságát $\overline{h}$. Ezzel a feltételek alapján: $174{,}3 = \frac{21\cdot \overline{h} + 9\cdot 182}{30}$,	3 pont	
ahonnan $\overline{h} = 171\,\text{cm}$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. (1. megoldás)		
Jelölje a az eredeti kocka élhosszát, b pedig a 99., nem egységkocka élhosszát centiméterben mérve. A feltételek alapján a és b pozitív egészek, és $98 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.	3 pont	
Mivel $98 = 2\cdot 7^2$ és $a-b < a^2+ab+b^2$, ezért három eset lehetséges:	2 pont	
I. $a-b=1$ és $a^2+ab+b^2=98$. Ekkor $a=b+1$ helyettesítéssel a második egyenletből adódik, hogy $3b^2+3b=97$, ami nem lehet, hiszen a 3 nem osztója a 97-nek.	3 pont	
II. $a-b=2$ és $a^2+ab+b^2=49$. Ekkor $b^2+2b=15$, ahonnan a feltételeknek megfelelő megoldás $b=3, a=5$.	3 pont	
III. $a-b=7$ és $a^2+ab+b^2=14$. Ekkor $3b^2+21b=-35$, ami nem lehetséges, ugyanis a b pozitív egész szám.	3 pont	*Jó indoklás az is, hogy -35 nem osztható 3-mal.*
Azt kaptuk, hogy az eredeti kocka éle 5 cm, így a térfogata 125 cm^3.	2 pont	
Összesen:	**16 pont**	

9. (2. megoldás)		
$\left.\begin{array}{l} a^3-b^3=98 \\ b>1 \end{array}\right\}$	2 pont	
Ebből következik, hogy $\sqrt[3]{98} < a$ és $a \in \mathbf{N}$.	3 pont	
Tehát $5 \le a$.	2 pont	
Mivel $a \ge b+1$, ezért $a^3-(a-1)^3 \le 98$,	2 pont	
és mivel $7^3-6^3=127>98$ miatt $a<7$,	2 pont	*A másodfokú egyenlőtlenség megoldásával is eljuthat a helyes értékekhez.*
így $a=5$ vagy $a=6$.	2 pont	
$a=5$ esetén $b=3$, ami megfelel a feltételeknek.	1 pont	
$a=6$ esetén $b^3=118$, ami nem köbszám, nem megoldás.	1 pont	
Tehát a kocka térfogata: 125 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	