ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2005. május 10.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÉRETTSÉGI VIZSGA

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

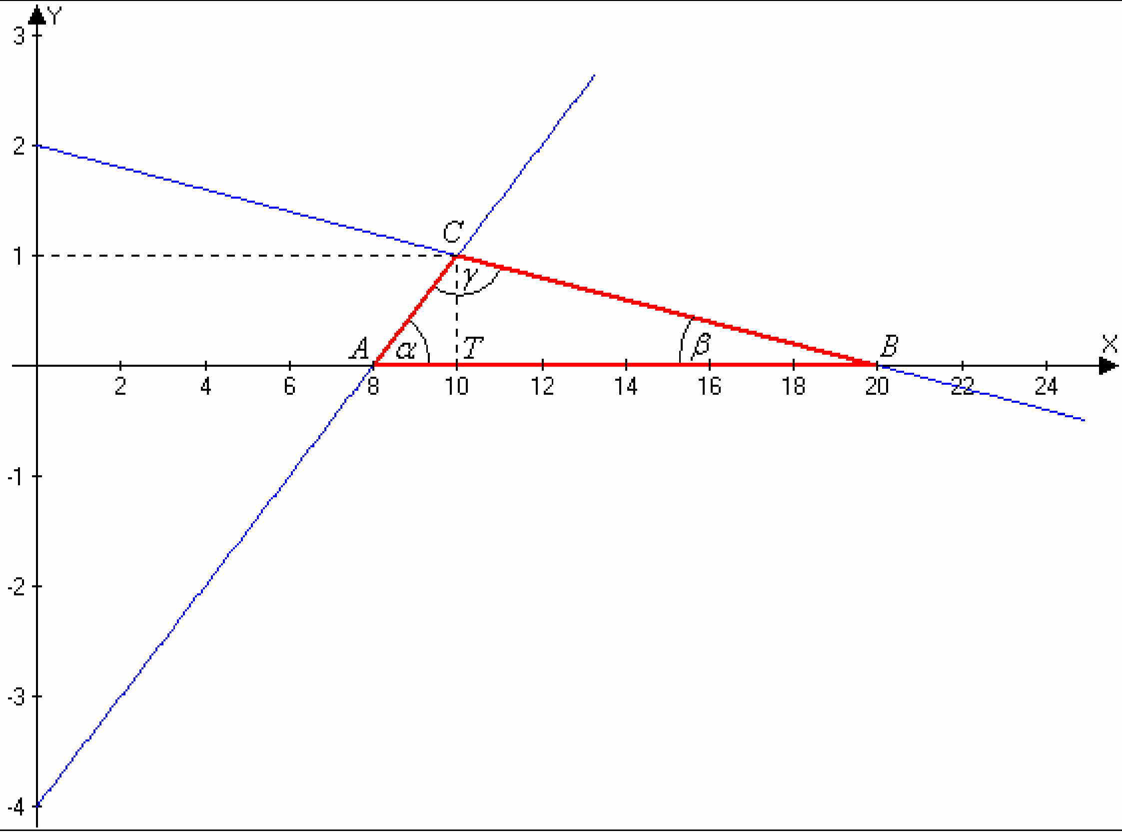
- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.



a)

Az $y=0$ egyenest, vagyis az x tengelyt az $x+10y=20$ egyenes a $B(20;\ 0)$ pontban,	2 pont	
az $y=\frac{1}{2}x-4$ egyenes az $A(8;\ 0)$ pontban metszi.	2 pont	
Az $x+10y=20$ és $y=\frac{1}{2}x-4$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása $x=10;\quad y=1$,	2 pont	
ezért a háromszög harmadik csúcsa $C(10;\ 1)$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

b)

Legyen a C-ből húzott magasság talppontja T. A CTB derékszögű háromszögből $tg\beta=0{,}1$.	3 pont	*β valamely szögfüggvényének meghatározásáért 3 pont. (pl. iránytangensből vagy koszinusztétellel stb.)*
Így $\beta\approx 5{,}71°$.	1 pont	*Ha **elvileg** hibás a szögfüggvény meghatározása, akkor pusztán a jó visszakeresésért nem jár pont.*
Összesen:	**4 pont**	

2.

a)

A	B	C	D
igaz	hamis	igaz	igaz

(táblázat)	4 pont	*Minden helyes válaszért 1 pont.*
Összesen:	**4 pont**	

b)

Összesen $2^4 = 16$ kitöltés lehetséges.	1 pont	
Ezek közül csak 1 helyes.	1 pont	
Így a valószínűség $\frac{1}{16} = 0{,}0625$.	1 pont	*Bármilyen formában megadott helyes válasz esetén jár az 1 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

c)

Van olyan szerelem, amelyik („aki”) nem múlik el.	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

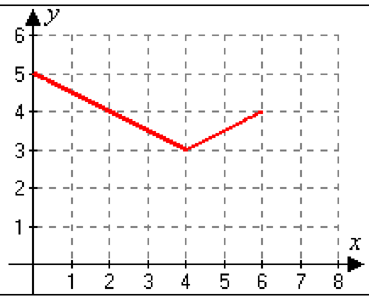
d)

Pl. Hány egyenest határoz meg a sík 17 pontja, ha nincs közöttük három egy egyenesre illeszkedő?	3 pont	*Ha a probléma lényege megjelenik a megfogalmazásban, de a szöveg pontatlan, akkor 1 vagy 2 pont adható.*
Összesen:	**3 pont**	

3.

Ha a számtani sorozat második tagja a_2 és differenciája d, akkor $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 60$,	2 pont	*Az első feltétel két ismeretlennel való felírásáért összesen 2 pont.*
ahonnan $a_2 = 20$.	1 pont	*Vagy $a_1 + d = 20$.*
A mértani sorozat első három tagja: $84 - d$; 20; $20 + d$,	1 pont	
ezért $(84 - d)(20 + d) = 400$, vagy $\frac{20}{84-d} = \frac{20+d}{20}$.	2 pont	*Az egyismeretlenes másodfokú egyenlethez való eljutásért összesen 3 pont.*
Rendezve az egyenletet $d^2 - 64d - 1280 = 0$.	2 pont	*Az egyenletrendezésért.*
Innen $d_1 = -16$ vagy $d_2 = 80$.	2 pont	*Másodfokú egyenlet megoldásáért.*
$d_1 = -16$ nem megoldás, mert a számtani sorozat növekedő.	1 pont	*Amennyiben nem zárja ki ezt az esetet, és két sorozatot kap megoldásként, ezt az 1 pontot veszíti el.*
$d_2 = 80$ esetén a számtani sorozat első három tagja: –60; 20; 100, ami valóban megoldás.	1 pont	*A számok helyes felírásáért az 1 pont jár.*
Az ebből kapott 4; 20; 100 valóban egy mértani sorozat első három tagja.	1 pont	*A számok helyes felírásáért az 1 pont jár.*
Összesen:	**13 pont**	

Ha a számtani és a mértani sorozat fogalmát jól érti, helyesen írja fel, de tovább nem jut, akkor 2 pont jár.

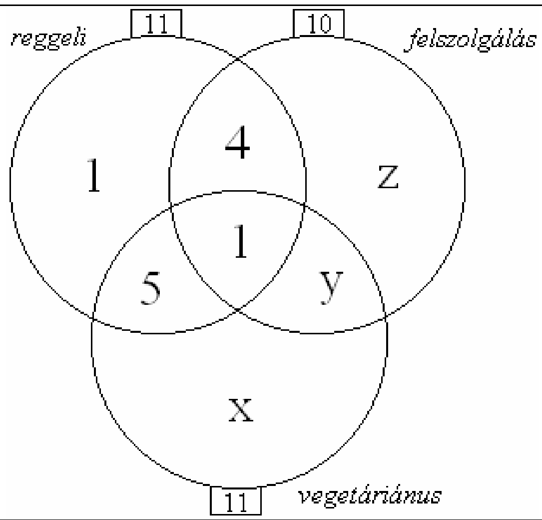
4.		
a)		
	4 pont	*Akár függvénytranszformáció-val, akár másként dolgozik, a helyes grafikonra 4 pont jár. Hiányos vagy hibás grafikon esetén arányosan kevesebb pontot kap.*
Összesen:	**4 pont**	

b)		
Az értékkészlet: $[3;\ 5]$.	2 pont	*Más módon megadott helyes válasz is teljes pontot ér.*
Összesen:	**2 pont**	

c)		
A keletkezett forgástest egy csonkakúp.	2 pont	*Rajzban is elfogadható.*
Az alapkörök sugara: $R = 5;\ r = 3$.	2 pont	
Az alkotó hossza Pitagorasz-tétellel: $a = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.	2 pont	
A felszín $A = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)a\pi =$ $= 25\pi + 9\pi + 16\sqrt{5}\pi = (34 + 16\sqrt{5})\pi \approx$ $\approx 69{,}78\pi \approx 219{,}2$.	2 pont	*Ha közelítő értéket nem számol, akkor is jár a 2 pont.*
Összesen:	**8 pont**	

II.

Az 5.–9. feladatok közül a tanuló által megjelölt feladatot nem kell értékelni.

5.


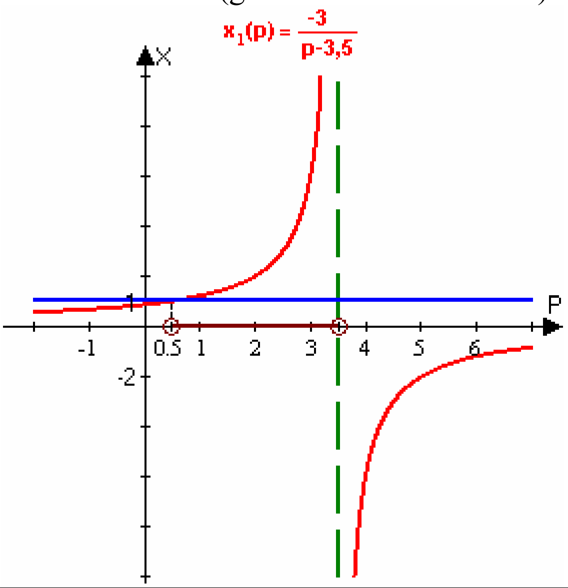
a)		
A fenti Venn diagram mutatja a különböző kategóriákba tartozó éttermek számát.		*A megoldáshoz nem kell feltétlenül rajzolni, a teljes pontszám diagram nélkül is elérhető.*
Mivel egy olyan étterem van csak, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható, ezért a három halmaz metszetébe 1-et írhatunk.	1 pont*	
Mivel 5 étteremben van reggeli és felszolgálás is, ezért reggeli és felszolgálás vegetáriánus menü nélkül 5 – 1 = 4 helyen van.	1 pont*	
Mivel 5 étteremben adnak reggelit, de vegetáriánus menüt nem lehet kapni, ezért csak reggelit 1 helyen lehet kapni.	1 pont*	
Mivel 11-ben lehet reggelit kapni, ezért reggeli és vegetáriánus menü felszolgálás nélkül 11 – 1 – 4 – 1 = 5 helyen van.	1 pont*	
Mivel 11 helyen van vegetáriánus menü, és ezek közül 6 helyen van reggeli is, ezért 5 helyen van vegetáriánus menü, de nincs reggeli.	1 pont*	
Összesen:	**5 pont**	
**A diagramba beírt minden helyes értékért 1 pont jár, indoklás nélkül is.*		

b)		
A „vegetáriánus helyek” száma miatt: $y = 5 - x$, a felszolgálós helyek száma miatt: $z = x$.	2 pont	
Így az összes vendéglők száma $11 + 2x + 5 - x = 18$,	1 pont	
ahonnan $x = 2$,	1 pont	
ezért $y = 3$ (és $z = 2$).	1 pont	*z értéke nem kell a válaszokhoz.*
Tehát $y + 1 = 4$ étteremben szolgálnak fel vegetáriánus menüt.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

c)		
Összesen 18 étterem van, ebből 11-ben lehet reggelizni. Az összes címet tartalmazó *A* urnából húzva $\frac{11}{18} \approx 0{,}61$ a nyerés valószínűsége.	2 pont	*Bármelyik helyes alakért jár a 2 pont.*
A 8 önkiszolgáló étterem közül 6-ban lehet reggelizni, így a *B* urnából húzva $\frac{6}{8} = 0{,}75$ a nyerés valószínűsége,	2 pont	*Bármelyik helyes alakért jár a 2 pont.*
ezért a *B* urnából érdemes húzni.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6.		
a)		
Behelyettesítve az $x=-2$ értéket: $f(-2)=(p-3{,}5)\cdot 4-4(p-2)+6=$ $=4p-14-4p+8+6=0.$	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a b) résszel kezdi a megoldást a vizsgázó, felteszi, hogy $(p\neq 3{,}5)$, megoldja az egyenletet, kihozza, hogy az egyik gyök –2 és megmutatja, hogy ez $p=3{,}5$ esetén is gyök.*
Összesen:	**2 pont**	

b)		
$p=3{,}5$ esetén nem másodfokú az egyenlet, nincs két gyök, ezért $p\neq 3{,}5$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei $x_{1,2}=\dfrac{-2(p-2)\pm\sqrt{4(p-2)^2-24(p-3{,}5)}}{2(p-3{,}5)}=$	1 pont	
$=\dfrac{-p+2\pm\sqrt{p^2-10p+25}}{p-3{,}5}=$	1 pont	
$=\dfrac{-p+2\pm(p-5)}{p-3{,}5}\ \Rightarrow$	2 pont	
$x_1=\dfrac{-3}{p-3{,}5}$ és $x_2=-2$	1 pont	*A paraméteres másodfokú egyenlet gyökeiért összesen 5 pont.*
A $\dfrac{-3}{p-3{,}5}>1$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Az egyenlőtlenséget rendezve $\dfrac{-p+0{,}5}{p-3{,}5}>0$.	2 pont	*Ha a (p – 3,5)-del előjelvizsgálat nélkül szoroz, akkor a továbbiakra nem jár pont.*
nevező −−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−0+++++++ számláló +++++++++0−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−− 0 0,5 3,5	2 pont 2 pont	
Az egyenlőtlenség teljesül, ha $0{,}5<p<3{,}5$.	2 pont	*Az egyenlőtlenség megoldásáért összesen 8 pont.*
Összesen:	**14 pont**	
Ha csak annyit állapít meg, hogy ($p\neq 3{,}5$ feltétel mellett) a két különböző gyök létezésének elégséges feltétele az, hogy $p\neq 5$, akkor 2 pontot kap.		

Megjegyzés: Az utolsó gondolati egység grafikus megoldása:		
Az $x_1(p)$ függvény monotonitásának felhasználásával (grafikonon szemléltetve): 	6 pont	*$x_1(p)$ grafikonjáért 4 pont.* *A metszéspont kiszámításáért 2 pont. (Ha leolvassa a metszéspont abszcisszáját és ellenőrzi, ugyancsak 2 pont. Ha pontatlanul olvassa le, vagy nem ellenőrzi, akkor csak 1 pont.)*
Az egyenlőtlenség teljesül, ha $0,5 < p < 3,5$.	2 pont	*A megoldás felírásáért 2 pont.*

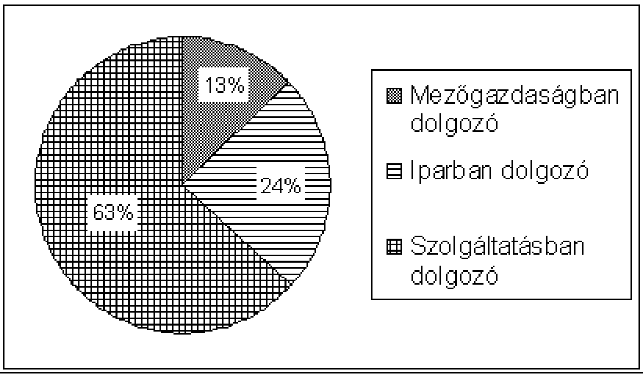
7.		
A gyökök alatt teljes négyzetek állnak: $\sqrt{(\sin x - 2)^2} + \sqrt{(\sin x + 2)^2} = \sqrt{(\sin x + 3,5)^2}$.	2 pont	*A teljes négyzetek felismeréséért.*
Elvégezve a gyökvonást: $\|\sin x - 2\| + \|\sin x + 2\| = \|\sin x + 3,5\|$.	2 pont	*Ha a gyökvonás során az abszolútérték-jelet elhagyja és sinx =3,5-ből arra következtet, hogy nincs megoldás, akkor maximum 4 pontot kaphat.*
Mivel $-1 \le \sin x \le 1$, ezért: $\left.\begin{array}{l} \sin x + 2 > 0 \\ \sin x - 2 < 0 \\ \sin x + 3,5 > 0 \end{array}\right\} \forall x \in \mathbf{R}$ esetén.	3 pont	*Az értékkészletek vizsgálásáért 3 pont.* *Az abszolútérték helyes felbontásáért összesen 5 pont.*
Így az abszolútérték-jelek elhagyásával: $-\sin x + 2 + \sin x + 2 = \sin x + 3,5$.	2 pont	
$\sin x = \frac{1}{2}$.	1 pont	
Innen $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,	2 pont	*Lásd megjegyzés!*
vagy $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,	2 pont	
ahol $k \in \mathbf{Z}$.	1 pont	
Ellenőrzés: mindkét gyöksorozat megoldása az egyenletnek.	1 pont	*Behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára való hivatkozással.*
Összesen:	**16 pont**	

Megjegyzés: várható típushibák pontozása.

$x_1 = 30° + k \cdot 360°$ (1 pont); $x_2 = 150° + k \cdot 360°$ (1 pont); $k \in \mathbf{Z}$ (1 pont)
vagy
$x_1 = 30°$; $x_2 = 150°$ (1 pont)
vagy
$x_1 = 30° + k \cdot 2\pi$; $x_2 = 150° + k \cdot 2\pi$ (1 pont); $k \in \mathbf{Z}$ (1 pont)

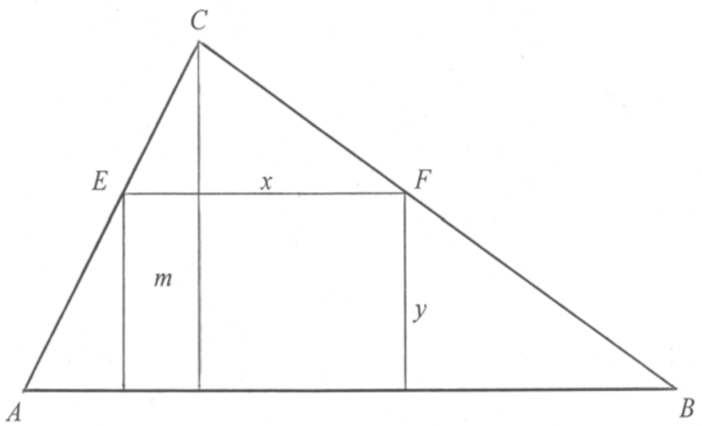
8.		
a)		
A munkaképes lakosság száma $8500 \cdot 1{,}003 \approx 8526$ (ezer fő).	2 pont	
A munkanélküliek aránya változatlan, ezért számuk $8526 \cdot \frac{595}{8500} \approx 597$ (ezer fő).	2 pont	*Indoklás nélkül 1 pont jár.*
A szolgáltatásban dolgozók száma $5015 \cdot 1{,}02 = 5115$ (ezer fő).	2 pont	
A mezőgazdaságban dolgozók száma $8526 - 597 - 1926 - 5115 = 888$ (ezer fő).	1 pont	
(táblázat alább)		*Ha nem kerekít ezresekre, maximum 5 pontot kaphat. Ha hibásan kerekít, kerekítési hibánként 1 pontot veszít.*
Összesen:	**7 pont**	

	2003. év (*ezer fő*)	2004. év (*ezer fő*)
Mezőgazdaság	1020	888
Ipar	1870	1926
Szolgáltatás	5015	5115
Munkanélküli	595	597
Összesen	8500	8526

b)		
2003-ban a foglalkoztatottak száma 7905 ezer fő.	1 pont	*Ha csak 7905-öt ír, nem kap pontot.*
A kördiagramon a mezőgazdaságban dolgozókat szemléltető körcikk középponti szöge az aránynak megfelelően: $\frac{1020}{7905}\cdot 360° \approx 46°$.	1 pont	*Az 1-1 pont a szög értékének megállapításáért jár, a számítás leírása nem követelmény.*
Az iparban dolgozókat szemléltető körcikk középponti szöge: $\frac{1870}{7905}\cdot 360° \approx 85°$.	1 pont	
(A szolgáltatásban dolgozók körcikke $\frac{5015}{7905}\cdot 360° \approx 228°$-os.)		
A foglalkoztatottak megoszlása ágazatok szerint 2003-ban: 	2 pont	*A % értékek felírása nem követelmény a 2 ponthoz, de az azonosíthatóság igen.*
Összesen:	**5 pont**	

c)		
$\frac{888}{1020} \approx 0{,}87$.	2 pont	
A csökkenés körülbelül 13 százalékos.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9.



Az AB oldalhoz tartozó magasság kiszámításához írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen! $T=\sqrt{54\cdot 12\cdot 14\cdot 28}=504$.	2 pont	
$T=\dfrac{42\cdot m}{2}$.	1 pont	
A kétféle felírás egyenlőségéből $m = 24$.	2 pont	
Legyen a téglalap AB-re illeszkedő oldala x, másik oldala y. Az ABC háromszög hasonló az EFC háromszöghöz, mert párhuzamos helyzetűek.	2 pont	
A hasonlóság miatt: $\dfrac{x}{24-y}=\dfrac{42}{24}$,	2 pont	
ahonnan $y=\dfrac{168-4x}{7}$.	1 pont	
A téglalap területe x függvényében, $x\in\,]0;\,42[$: $t(x)=xy=\dfrac{168x-4x^2}{7}$.	1 pont	*Az értelmezési tartomány jelölése nélkül is 1 pont.*
Elegendő a $\dfrac{7}{4}\cdot t(x)=42x-x^2$ függvény szélsőérték helyét keresni.	1 pont*	
Teljes négyzetté alakítva a függvényt: $x\mapsto -(x-21)^2+441$.	1 pont*	
A függvényérték maximális, ha a négyzetes tag nulla, azaz $x=21$.	1 pont*	*A szélsőérték helyének bármilyen módon való helyes megoldásáért 4 pont.*
$21\in\,]0;42[$, tehát itt van a maximum.	1 pont*	
A téglalap másik oldala $y=12$.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

* *Megjegyzés:* a szélsőérték keresése deriválással: $t'(x) = \frac{168}{7} - \frac{8}{7}x$	1 pont	
A derivált nulla, ha $x = 21$.	1 pont	
$t''(x) = -\frac{8}{7} < 0$, tehát $x = 21$ lokális maximumhely.	1 pont	
$21 \in \left]0;42\right[$, tehát itt van a maximum.	1 pont	