
ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2006. február 21.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2006. február 21. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 9. feladatra nem kap pontot.

A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!

Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!

A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető.

Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\cos 2x + 4\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$$

12 pont	

2. Az 52 941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52 941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel?

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám!

a)	**2 pont**	
b)	**6 pont**	
c)	**4 pont**	
Ö.:	**12 pont**	

3. Egy automatából 100 Ft értékű ital kapható, s az automatába csak 100 Ft-os érme dobható be. Az italautomata gyakran hibásan működik.

160 kísérletet végezve azt tapasztaljuk, hogy

- az esetek 18,75%-ában az automata elnyeli a pénzt, és nem ad italt;
- 90 esetben visszaadja a 100 forintost, anélkül, hogy italt adna;
- 30 esetben italt is ad és a 100 Ft-os érmét is visszaadja;
- és csak a fennmaradó esetekben működik rendeltetésszerűen.

a) Mekkora annak az esélye az adatok alapján, hogy egy százast bedobva az automata rendeltetésszerűen fog működni?

b) Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy ingyen ihatunk, vagy annak, hogy ráfizetünk?

c) Várhatóan mennyi lesz a ráfizetése annak, aki 160-szor próbál vásárolni ennél az automatánál?

a)	**4 pont**	
b)	**5 pont**	
c)	**4 pont**	
Ö.:	**13 pont**	

4. Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, a felbontást az alábbi módon kezdve:

$$(1),\ (2;\ 3),\ (4;\ 5;\ 6),\ (7;\ 8;\ 9;\ 10),\ \ldots$$

a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme?
b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme?

a)	**5 pont**	
b)	**9 pont**	
Ö.:	**14 pont**	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

5. Az *ABCD* trapéz párhuzamos oldalai *AB* és *CD*, és $AB > CD$. A trapéz átlóinak metszéspontja *K*. Az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága kétszerese a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságának. Jelölje *T* az *ADK* háromszög területét. Hányszorosa az *ABCD* trapéz területe *T*-nek?

16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

6. A „TOJÁS” farmon átlagosan 10 000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak.
A tenyésztők azt tapasztalták, hogy – valószínűleg a zsúfoltság csökkenése miatt – ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.

a) A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés?

Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának p %-kal történő csökkentése $2p$ %-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p < 30$ esetén érvényes.

b) Hány százalékkal csökkentették a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt?

a)	**5 pont**	
b)	**11 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

7. A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfélen” elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges párosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.

a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll.

b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén” lévő pöttyök számának összege 8?

c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük”, amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.)

a)	**5 pont**	
b)	**3 pont**	
c)	**8 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

8. Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében!

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágtuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait.
Mekkora x esetén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális?

a)	**6 pont**	
b)	**10 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

9. Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}\,(\lg a;\, \lg b)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\, \lg\frac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0 < a < 1$, illetve $1 < b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátájánál!

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra!

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge?

d) Legyen $a = \frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve a B pontok halmazát!

a)	**3 pont**	
b)	**3 pont**	
c)	**4 pont**	
d)	**6 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

(Ezen az oldalon is készíthet vázlatokat, vagy megoldásokat.)

(Ezen az oldalon is készíthet vázlatokat, vagy megoldásokat.)

	a feladat sorszáma	elért pontszám	összesen	maximális pontszám
I. rész	1.			12
	2.			12
	3.			13
	4.			14
II. rész				16
				16
				16
				16
		← nem választott feladat		
	MINDÖSSZESEN			**115**

dátum javító tanár

	a feladat sorszáma	elért pontszám	programba beírt pontszám
I. rész	1.		
	2.		
	3.		
	4.		
II. rész			

dátum

javító tanár jegyző