

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2006. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTERIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

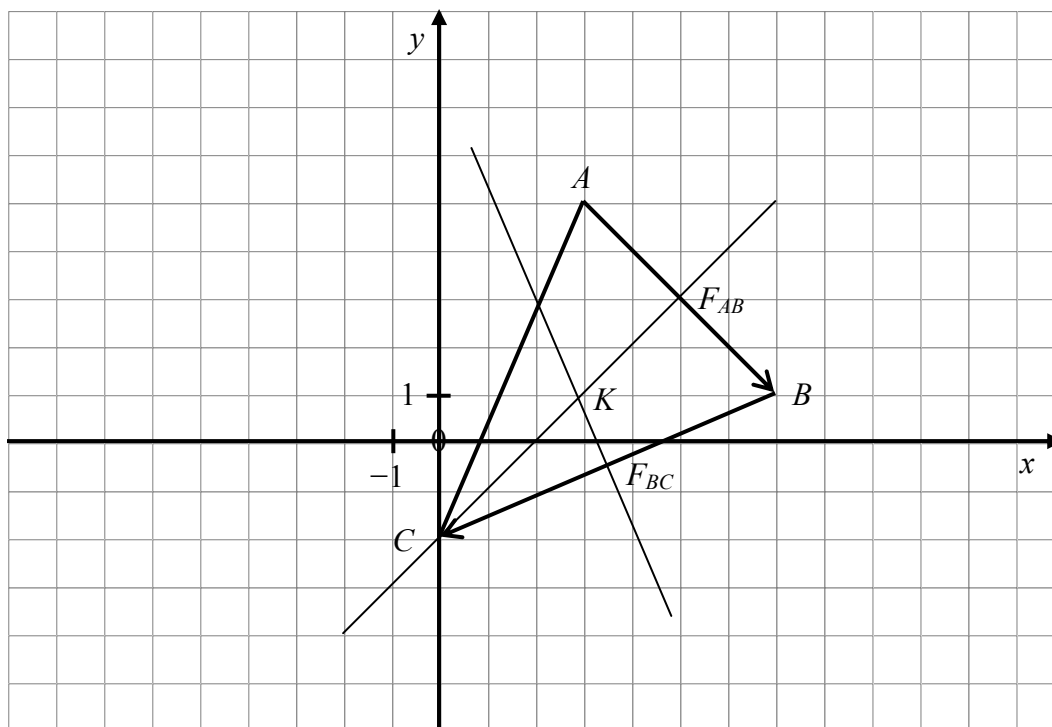
- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy rész kérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)



A háromszög C csúcsát az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az y tengelyből. AB felezőpontja: $F_{AB}(5; 3)$.	1 pont	
AB felezőmerőlegesének egyik normálvektora: $\vec{AB}(4; -4)$.	1 pont	
AB felezőmerőlegesének egyenlete: $x - y = 2$.	1 pont	
Az AB alappal szemközti csúcs: $C(0; -2)$.	1 pont	<i>Ha a C csúcs koordinátáit egy jó ábráról olvassa le a vizsgázó számítások nélkül, akkor az előző 4 pontból legfeljebb 2 pont adható.</i>
Összesen:	4 pont	

b)

A köré írt kör középpontja az AB alap felezőmerőlegesének és valamelyik szár felezőmerőlegesének a metszéspontja.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a gondolatmenet a számolásból látszik.</i>
A BC oldal felezőpontja: $F_{BC}\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.	1 pont	
BC felezőmerőlegesének egyik normálvektora: $\vec{CB}(7; 3)$.	1 pont	
BC felezőmerőlegesének egyenlete: $7x + 3y = 23$.	1 pont	

AB felezőmerőlegesének egyenletéből és BC felezőmerőlegesének egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása $x = 2,9$; $y = 0,9$, így a köré írt kör középpontja: $K(2,9; 0,9)$.	2 pont	
A köré írt kör sugarának négyzete: $r^2 = KC^2 = 2 \cdot 2,9^2 = 16,82$.	1 pont	
A háromszög köré írt kör egyenlete: $(x - 2,9)^2 + (y - 0,9)^2 = 16,82$.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

2.

A piros kocka élének hossza a , a kék kocka élének hossza b . A piros kocka felszíne $6a^2$, a kék kockáé $6b^2$.	2 pont	
A feltétel alapján: $6a^2 = \frac{3}{4} \cdot 6b^2$.	3 pont	
Ebből, felhasználva, hogy $a > 0$ és $b > 0$: $a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$.	2 pont	
A piros kocka térfogata a kék kocka térfogatával kifejezve: $a^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} b^3$.	3 pont	
Mivel $\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,65$, ezért a piros kocka térfogata a kék kocka térfogatának $\approx 65\%$ -a.	1 pont	
Tehát a piros kocka térfogata kb. 35%-kal kisebb, mint a kék kocka térfogata.	1 pont	
Összesen:	12 pont	

3. a)

Ha x_1, x_2 az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet gyökei, akkor $x_1 + 1, x_2 + 1$ az $x^2 + px - 1 = 0$ egyenlet gyökei.	2 pont	<i>Ez a pontszám akkor is jár, ha a gyököket paraméteresen a megoldóképlettel írja fel a vizsgázó.</i>
Mindkét egyenlet esetén a gyökök összegére vonatkozó Viète-formulák: $x_1 + x_2 = 1$ és $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = -p$.	3 pont	<i>Ez a 3 pont a megoldóképlettel kapott gyökök megfelelő párosításáért is adható.</i>
Ezekből adódik, hogy $p = -3$ lehet.	3 pont	
$p = -3$ esetén mindkét egyenletnek valós gyökei vannak.	1 pont	<i>Ez az 1 pont a diszkrimináns vizsgálatáért is adható.</i>
Összesen:	9 pont	

b)		
Az $x^2 - x + 5 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért nincsenek valós gyökei.	2 pont	
Az $x^2 + 5x - 1 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} (\approx 0,19)$; $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} (\approx -5,19)$.	2 pont	
Összesen:	4 pont	

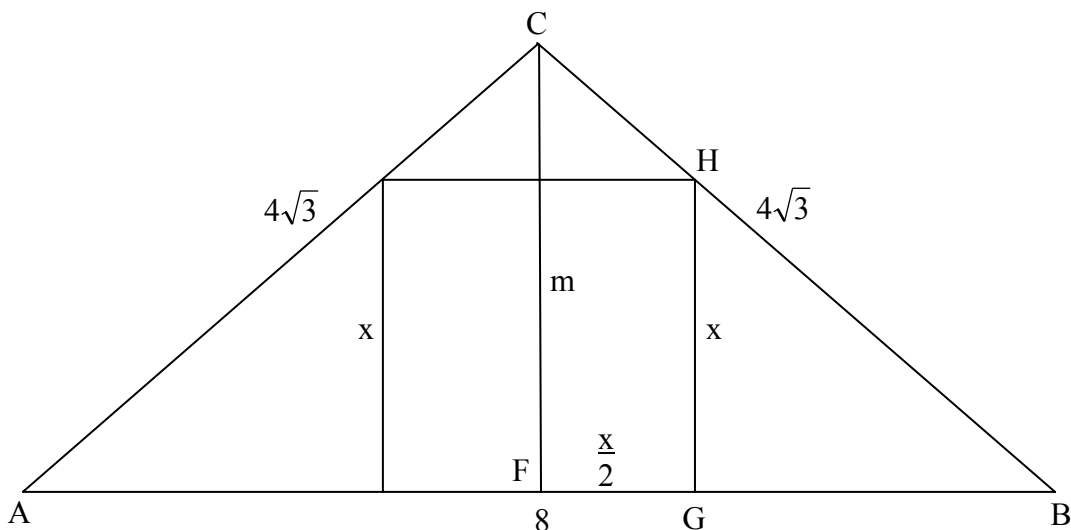
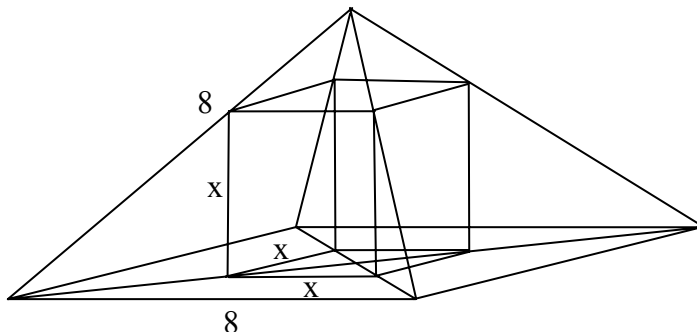
4. a) (1. megoldás)		
Jelölje rendre A , B és C a számítógép kutatásban, oktatásban és kommunikációban betöltött szerepéről publikáló tudósok halmazát. A feladat feltételei ezzel a jelöléssel: $ A = 12$, $ B = 18$, $ C = 17$, $ A \cup B \cup C = 30$.	1 pont	
$ A \cap B + B \cap C + C \cap A - 3 \cdot A \cap B \cap C = 7$.	2 pont	
A logikai szita formulát alkalmazva: $30 = A \cup B \cup C =$ $= A + B + C - A \cap B - B \cap C - C \cap A + A \cap B \cap C =$ $= 12 + 18 + 17 - 7 - 2 \cdot A \cap B \cap C $.	3 pont	
Ebből adódik, hogy $ A \cap B \cap C = 5$.	2 pont	
A kérdéses valószínűség: $P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.	2 pont	
Összesen:	10 pont	

a) (2. megoldás)		
	3 pont	
A feltételek alapján: (1) $a + b + c = 7$.	1 pont	
(2) $x + a + b + c + 12 - (a + c + x) + 18 - (a + b + x) + 17 - (b + c + x) = 30$	2 pont	

A (2) bal oldalán elvégezve az összevonásokat: $47 - 2x - (a + b + c) = 30$.	1 pont	
(1) behelyettesítése és rendezés után adódik, hogy $x = 5$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.	2 pont	
Összesen:	10 pont	
b)		
5 tudós publikált mindhárom témában, 7 tudós pontosan két témában, így 12 olyan tudós van, akik legalább két témában publikáltak.	2 pont	
A specialisták száma így $30 - 12 = 18$.	2 pont	
Összesen:	4 pont	

II.

5. a)

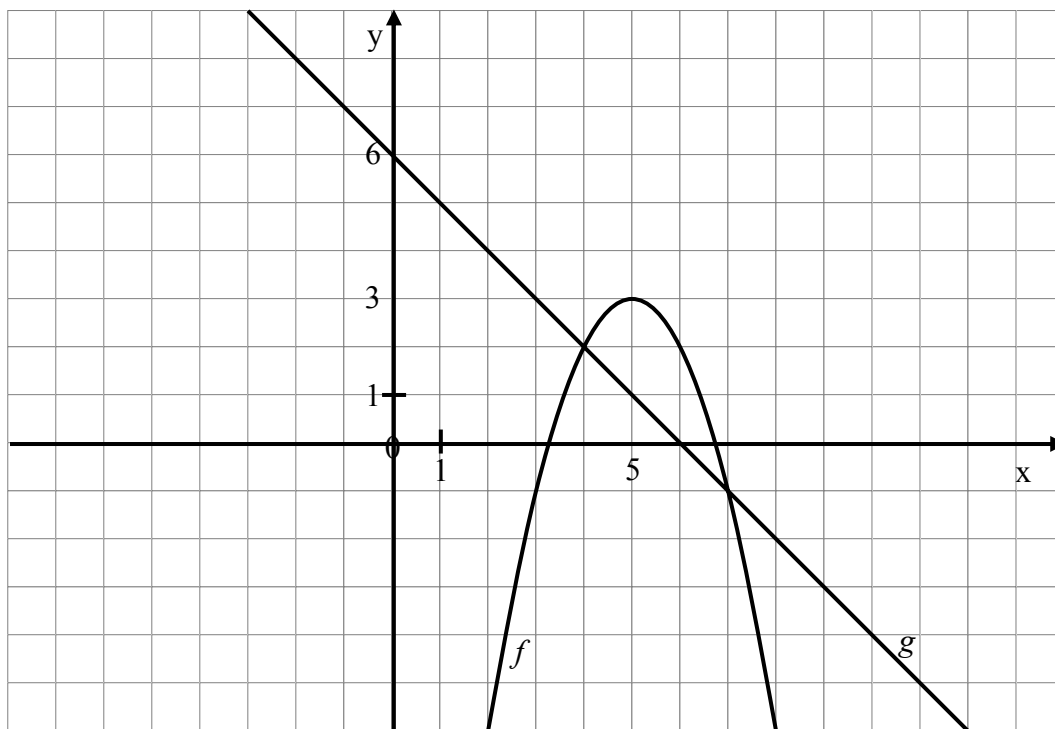


<p>A tetőtéri helyiség oldalélének meghatározásához vegyük a gúla csúcsára és két szemközti alapél felezőpontjára illeszkedő síkmetszetét.</p>	<p>2 pont</p>	<p><i>Ez a 2 pont a térbeli viszonyok helyes elképzelését tükröző ábra esetén is jár.</i></p>
<p>Ez egy egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 8, szára $4\sqrt{3}$ méter hosszú.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Ennek a háromszögnek az alaphoz tartozó magassága Pitagorasz tétele alapján $m = 4\sqrt{2}$ (m).</p>	<p>1 pont</p>	
<p>A síkmetszet ábrájának jelöléseit használva a CFB derékszögű háromszög hasonló a HGB derékszögű háromszöghöz,</p>	<p>1 pont</p>	
<p>ugyanis az FBC szög közös hegyesszög.</p>	<p>1 pont</p>	

Ha x jelöli a kocka élének hosszát (síkmetszetben a háromszögbe beírt négyzet oldalát), akkor a hasonlóság alapján $\frac{x}{4 - \frac{x}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$,	1 pont	
ahonnan $x = \frac{8\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \approx 3,3$ (m).	1 pont	
A helyiség alapterülete: $T = x^2 = \frac{64}{3 + 2\sqrt{2}} \approx 11$ m ² .	1 pont	
Összesen:	9 pont	
b)		
A gúla magassága az előzőek alapján $m = 4\sqrt{2}$.	1 pont	
A tetőtér (gúla) térfogata így: $V_t = \frac{8^2 \cdot 4\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3 = \frac{256\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3 \approx 120,68 \text{ m}^3$.	2 pont	<i>A megfelelő pontszámok a közelítő értékek feltüntetése nélkül is járnak.</i>
A kocka térfogata: $V_k = \left(\frac{8\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^3 \text{ m}^3 = \frac{1024\sqrt{2}}{(2 + \sqrt{2})^3} \text{ m}^3 \approx 36,38 \text{ m}^3$.	2 pont	
A térfogatok aránya: $\frac{V_k}{V_t} = \frac{12}{(2 + \sqrt{2})^3} \approx 0,3015$.	1 pont	
A helyiség közelítőleg 30%-át foglalja el a légtérnek.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

6. a)		
A megoldandó egyenlet: $-x^2 + 10x - 22 = -x + 6$. Átalakítva: $x^2 - 11x + 28 = 0$.	1 pont	
A megoldások: $x_1 = 4, x_2 = 7$.	2 pont	
Összesen:	3 pont	
b)		
A metszéspontokba húzható érintők meredeksége: $m_1 = f'(x_1)$, illetve $m_2 = f'(x_2)$, $f'(x) = -2x + 10$.	1 pont	
Így $m_1 = f'(4) = 2$ és $m_2 = f'(7) = -4$.	2 pont	
A két grafikon metszéspontjai: $M_1(4; 2)$, illetve $M_2(7; -1)$.	2 pont	
A két érintő egyenlete: $e_1 : y - 2 = 2(x - 4)$, vagy más alakban $y = 2x - 6$,	1 pont	<i>Az érintők egyenletének bármelyik jól felírt alakjéért járnak a megfelelő pontszámok.</i>
$e_2 : y + 1 = -4(x - 7)$, vagy más alakban $y = -4x + 27$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

c)



<i>f</i> és <i>g</i> grafikonjának ábrázolása.	1 pont	<p><i>Legfeljebb 4 pont adható, ha a vizsgázó hibásan ábrázolja a függvényeket, és a hibás adatokkal (rossz intervallumon) számol.</i></p> <p><i>A megfelelő pontszám akkor is jár, ha a vizsgázó külön számolja ki a megfelelő integrálokat és kivonja őket egymásból, vagy ha a <i>g</i> függvény integrálját nem határozza meg, hanem az ábra alapján számolja ki a megfelelő egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, és ezt vonja ki az <i>f</i> integráljából.</i></p>
A kérdéses síkidom területe: $T = \int_4^6 f(x)dx - \int_4^6 g(x)dx = \int_4^6 (f(x) - g(x))dx$.	1 pont	
Mivel $f(x) - g(x) = -x^2 + 11x - 28$, ezért $T = \int_4^6 (-x^2 + 11x - 28)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 11\frac{x^2}{2} - 28x \right]_4^6 =$	2 pont	
$= \left(-\frac{6^3}{3} + 11 \cdot \frac{6^2}{2} - 28 \cdot 6 \right) - \left(-\frac{4^3}{3} + 11 \cdot \frac{4^2}{2} - 28 \cdot 4 \right) = \frac{10}{3}$.	2 pont	
Összesen:	6 pont	

7. a)									
Legyen s_1 a Szeged-Cegléd útvonal hossza km-ben, s_2 a Cegléd-Budapest távolság km-ben, valamint legyen v a vonat eredeti átlagsebessége km/h-ban. A vonat hétfői menetideje órában: $\frac{s_1}{v} + \frac{3s_2}{v}$.		2 pont	<p><i>Teljes megoldásnak tekinthető a képlet nélküli tömör indoklás is:</i></p> <p><i>A menetidőtől való 30 perces eltérést a 19 km-es szakaszon a hétfői sebesség kétszeresével nagyobb sebesség okozta. Így a vonat sebessége a 19/0,5 kétszerese, azaz 76 km/h.</i></p>						
A hétfégi menetidő órában: $\frac{s_1 + 19}{v} + \frac{3(s_2 - 19)}{v}$.		3 pont							
A két menetidő közötti különbségre vonatkozó feltétel alapján: $\left(\frac{s_1}{v} + \frac{3s_2}{v}\right) - \left(\frac{s_1 + 19}{v} + \frac{3(s_2 - 19)}{v}\right) = \frac{1}{2}$		3 pont							
Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy a vonat eredeti átlagsebessége $v = 76$ km/h.		2 pont							
Összesen:		10 pont							
b)									
Menetjegy jellege	Teljes árú	20%-os mérséklésű	33%-os mérséklésű	50%-os mérséklésű	67,5%-os mérséklésű	75%-os mérséklésű	90%-os mérséklésű	95%-os mérséklésű	Ingyenes
Utassok száma	84	18	44	110	11	35	31	29	38
Tényleges jegyár (Ft)	2000	1600	1340	1000	650	500	200	100	0
A táblázat adatainak kitöltése.		2 pont	<p><i>Ha a tényleges jegyárak között van hibás, de a számuk legfeljebb négy, akkor 1 pont adható. Ha négynél több hibás adat van, akkor nem jár pont.</i></p>						
<p>Az átlagos jegyár forintban:</p> $\frac{84 \cdot 2000 + 18 \cdot 1600 + 44 \cdot 1340 + 110 \cdot 1000 + 11 \cdot 650 + 35 \cdot 500 + 31 \cdot 200 + 29 \cdot 100 + 38 \cdot 0}{400} =$ $= \frac{399510}{400} = 998,775 (\approx 999 \text{ Ft, illetve } 1000 \text{ Ft}).$									
Ez a teljes árnak közelítőleg 50%-a, így az átlagos jegyár közelítőleg 50%-os mérséklésű lenne.		2 pont	<p><i>Jár a 2 pont akkor is, ha hibás adatok alapján, de elvileg jól számol a vizsgázó, vagy ha eredménye másféle kerekítésből adódott.</i></p>						
Összesen:		6 pont							

8. a)		
\overline{a} , \overline{ab} , \overline{bba} pontosan akkor egymást követő tagjai egy számtani sorozatnak, ha $\overline{bba} - \overline{ab} = \overline{ab} - \overline{a}$.	1 pont	
Helyiértékesen felírva: $(110b + a) - (10a + b) = (10a + b) - a$,	1 pont	
ahonnan átalakítások után adódik, hogy $a = 6b$.	1 pont	
Mivel a és b tízes számrendszerbeli számjegyek, ezért $a = 6, b = 1$.	2 pont	
Így a három szám 6; 61; 116, a differencia 55.	1 pont	
Az első száz elem összege: $S_{100} = \frac{100}{2}(2 \cdot 6 + 99 \cdot 55) = 272850$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	
b)		
A mértani sorozat első eleme a , hányadosa q . Ha $q = 1$, akkor a sorozat állandó, így a megfelelő összegek egyenlők. A három azonos szám egy mértani sorozat egymást követő tagjai.	1 pont	
Ha $q \neq 1$, akkor az első n elem összege: $S_n^{(1)} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.	1 pont	
A második n elem összege: $S_n^{(2)} = aq^n \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.	2 pont	
A harmadik n elem összege: $S_n^{(3)} = aq^{2n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.	2 pont	
Ezek az összegek ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő elemei, ha $(S_n^{(2)})^2 = S_n^{(1)} \cdot S_n^{(3)}$.	1 pont	
Ez viszont teljesül, ugyanis $S_n^{(1)} \cdot S_n^{(3)} = a^2 q^{2n} \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)^2 = \left(aq^n \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\right)^2 = (S_n^{(2)})^2$.	2 pont	
Összesen:	9 pont	<i>Az utolsó 3 pont bármilyen helyes indoklásért jár.</i>

9. a)		
Ha az első két szám a és b ($a < b$), akkor a harmadik szám $a + b$, a negyedik $2(a + b)$.	1 pont	
A feltétel alapján $2(a + b) \leq 40$, vagyis $a + b \leq 20$.	1 pont	
Mivel $a < b$, ezért $a \leq 9$, azaz a legkisebb szám legfeljebb 9 lehet.	2 pont	
Összesen:	4 pont	

b)		
Két lehetséges számnégyes van:	2 pont	
9, 10, 19, 38;	1 pont	
9, 11, 20, 40.	1 pont	
Összesen:	4 pont	
c)		
András szabálya szerint kitölthető lottószelvények számát az első szám választása alapján összegezzük. Első szám: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.	1 pont	
Szelvények száma rendre: 18 16 14 12 10 8 6 4 2.	2 pont	
A különböző szelvények száma így: $2 + 4 + \dots + 18 = 90$.	1 pont	
Az első 40 pozitív egész számból kiválasztható számnégyesek száma: $\binom{40}{4} = 91390$.	2 pont	
A telitalálat valószínűsége: $P = \frac{90}{91390} \approx 9,85 \cdot 10^{-4}$.	2 pont	
Összesen:	8 pont	