

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2011. október 18.**

# **MATEMATIKA**

## **KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

## **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**NEMZETI ERŐFORRÁS  
MINISZTERIUM**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

## I.

<b>1.</b>		
$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 (= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7).$	2 pont	<i>A pontszám nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

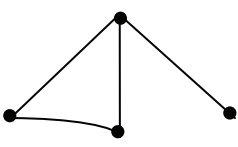
<b>2.</b>		
20 000 és 16 000.	2 pont	<i>Ha tudja, hogy a 36 000-et kilenc egyenlő részre kell osztani, akkor 1 pontot kap.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>3.</b>		
A 8 nap alatt 4-szer kétszereződött meg a sejtek száma ( $s$ ),	1 pont	<i>Ha helyesen felírja a sorozat első négy elemét, jár ez a 2 pont.</i>
$s = 5000 \cdot 2^4.$	1 pont	
$s = 80\,000.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4.</b>		
a) $\mathbf{N}$ ;	1 pont	<i>Bármilyen formában megadott helyes válasz esetén járnak a pontok.</i>
b) $\mathbf{Z}$ ;	1 pont	
c) $\emptyset$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>5.</b>		
$a = 2.$	1 pont	
$b = -3.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>6.</b>		
A medián: 7.	2 pont	<i>A pontszám nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>7.</b>		
Helyesen megadott gráf pl.		
	2 pont	<i>A pontszám nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>8.</b>		
$d = -3$	1 pont	
$a_{50} = a_1 + 49d$	1 pont	
$a_1 = 176$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>9.</b>		
B)	2 pont	<i>A 2 pont nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>10.</b>		
B)	2 pont	<i>A 2 pont nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>11.</b>		
$2000 \cdot 1,06^x = 4024$ .	1 pont	<i>Ha ez a gondolat a számolás során derül ki, akkor is jár ez a pont.</i>
$x$ kiszámítása $\lg 2000 + x \lg 1,06 = \lg 4024$ $x = \frac{\lg 4024 - \lg 2000}{\lg 1,06} \approx 11,998$ .	2 pont	<i>Ha zsebszámológéppel számolva, évről évre megadva az összeget kapja meg a 12 évet, az is teljes értékű megoldás.</i>
12 teljes év alatt.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>12.</b>		
Az egy csúcsból kiinduló (bármelyik) két lapátló a végpontjaik által meghatározott harmadik lapátlóval kiegészítve szabályos háromszöget határoz meg,	2 pont	<i>A helyesen berajzolt lapátlóért 1 pont jár.</i>
a keresett szög ezért $60^\circ$ -os.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

## II. A

13. a)		
A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet: $x \leq 5$ ,	1 pont*	
és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke: $ x  \geq \sqrt{35,5}$ .	1 pont*	
Négyzetre emelve: $x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 71$ .	1 pont	
Rendezve: $x^2 + 10x - 96 = 0$ ,	1 pont	
amelynek valós gyökei a $-16$ és a $6$ .	1 pont	
Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek Az egyenlet egyetlen megoldása a $-16$ , hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk.	1 pont*	<i>A *-gal jelölt pontokat akkor is megkapja, ha nem fogalmazza meg a feltételeket, de behelyettesítésekkel eldönti, hogy a másodfokú egyenlet két gyöke közül melyik megoldása az eredeti egyenletnek.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

13. b)		
A bal oldalon a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést elvégezve kapjuk: $1 - \cos^2 x = 1 + 2 \cos x$ .	1 pont	
$\cos^2 x + 2 \cos x = 0$ ;	1 pont	
$\cos x (\cos x + 2) = 0$ .	1 pont	
Ha $\cos x = 0$ , akkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , ahol $k \in \mathbf{Z}$ .	2 pont	<i>Ha a megoldást a felírt alakban adja meg, de nem szerepel az, hogy a <math>k</math> melyik halmaz eleme, vagy <math>2\pi</math>-t ad meg periódusként, akkor 1 pontot kap. Ha <math>x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ</math> (<math>k \in \mathbf{Z}</math>) alakban adja meg a megoldást, vagy fok és radián vegyesen szerepel a megoldás felírásában, akkor erre a részre 1 pontot kap. Ha leghagyja a periódust (például a válasza <math>x = 90^\circ</math>), akkor nem kap pontot.</i>
A $\cos x + 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása (mert $\cos x = -2$ nem lehetséges).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	
<i>Megjegyzés: Ha a másodfokú egyenlet megoldóképletével oldja meg az egyenletet, akkor is teljes pontszám járt.</i>		

<b>14. a)</b>		
A legalább 40 éveseknek a 18,75%-a adta az idézett választ.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat a számolás során derül ki, akkor is jár ez a pont.</i>
80-nak a 18,75%-a: $80 \cdot 0,1875$ .	1 pont	
Tehát 15, legalább 40 éves ember adta az „5-nél kevesebbszer” választ.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>14. b)</b>		
A 40 év alattiak közül $120 \cdot 0,35 = 42$ ,	1 pont	
a legalább 40 évesek közül $80 \cdot 0,375 = 30$ ,	1 pont	
azaz összesen 72 olyan ember van, aki évente 5–10 alkalommal jár színházba.	1 pont	
Ez a szám a megkérdezettek 36%-a.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>14. c) első megoldás</b>		
Az összes lehetséges kiválasztás: $\binom{200}{2}$ (= 19 900).	1 pont	
Két 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között: $\binom{120}{2}$ (= 7140) esetben.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a két kiválasztott 40 évnél fiatalabb: $\frac{\binom{120}{2}}{\binom{200}{2}} \left( = \frac{7140}{19\,900} \approx 0,359 \right)$ .	1 pont	
A komplementer esemény valószínűsége: $1 - \frac{\binom{120}{2}}{\binom{200}{2}} \left( = \frac{12\,760}{19\,900} \right)$ .	1 pont	
Tehát 0,641 annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között.	1 pont	<i>Ha nem három tizedesjegyre vagy hibásan kerekít, akkor ez a pont nem jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>14. c) második megoldás</b>		
Az összes lehetséges kiválasztás: $\binom{200}{2}$ (= 19 900).	1 pont	
Ezek közül mindkét véletlenszerűen kiválasztott legalább 40 éves: $\binom{80}{2}$ (= 3160) esetben,	1 pont	
különböző korosztályú: $80 \cdot 120$ (= 9600) esetben.	1 pont	
A kért esemény valószínűsége: $\frac{\binom{80}{2} + 80 \cdot 120}{\binom{200}{2}} \left( = \frac{12\,760}{19\,900} \right)$	1 pont	
Tehát 0,641 a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között.	1 pont	<i>Ha nem három tizedesjegyre vagy hibásan kerekít, akkor ez a pont nem jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>15. a) első megoldás</b>		
(A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a $P$ koordinátáit.) Az első egyenletből: $y = 2,5x + 7,25$ .	1 pont	
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe és rendezve: $x = -1,5$ .	1 pont	
$y = 3,5$ .	1 pont	
Tehát $P(-1,5; 3,5)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>15. a) második megoldás</b>		
(A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a $P$ koordinátáit.) $10x - 4y = -29$ $10x + 25y = 72,5$ <hr style="width: 100px; margin-left: 0;"/> $29y = 101,5$	1 pont	
$y = 3,5$	1 pont	
$x = -1,5$ .	1 pont	
Tehát $P(-1,5; 3,5)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés: A két egyenes helyes ábrázolása 1-1 pont. A jól ábrázolt egyenesek metszéspontja koordinátáinak  $(-1,5; 3,5)$  helyes leolvasása 1 pont, ezek ellenőrzése behelyettesítéssel 1 pont.*

<b>15. b) első megoldás</b>		
Az egyenesek normálvektora $\mathbf{n}_e(5; -2)$ és	1 pont	
$\mathbf{n}_f(2; 5)$ .	1 pont	
A normálvektorok skaláris szorzata: $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_f = 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 = 10 - 10 = 0$ .	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó arra hivatkozik, hogy a két normálvektor egymás <math>90^\circ</math>-os elforgatottja.</i>
Tehát a két egyenes merőleges.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>15. b) második megoldás</b>		
Az egyenesek meredeksége: $m_e = \frac{5}{2}$ ,	1 pont	
$m_f = -\frac{2}{5}$ .	1 pont	
A meredekségek szorzata $-1$ ,	1 pont	
tehát a két egyenes merőleges.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>15. c)</b>		
Az $e$ egyenes meredeksége $2,5$ , tehát az egyenes $x$ tengellyel bezárt $\alpha$ szögére igaz, hogy $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$ .	3 pont	
Ebből $\alpha \approx 68,2^\circ$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	



---

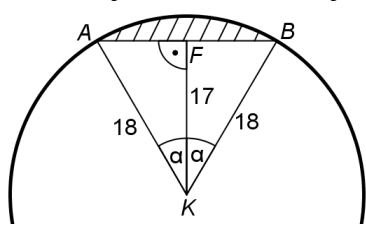
**II. B**

<b>16. a)</b>		
$M = -4,42 + \frac{2}{3} \lg(1,344 \cdot 10^{14})$	1 pont	
$M \approx 5$	2 pont	<i>4,9 és 5 között bármely érték elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>16. b)</b>		
$9,3 = -4,42 + \frac{2}{3} \lg E.$	1 pont	
$\lg E = 20,58.$	1 pont	
Tehát a felszabadult energia körülbelül $E \approx 3,8 \cdot 10^{20}$ (J).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>16. c)</b>		
A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai: $-4,42 + \frac{2}{3} \cdot \lg E_C = -4,42 + \frac{2}{3} \cdot \lg E_K + 2.$	1 pont	
Rendezve: $\lg E_C - \lg E_K = 3.$	1 pont	
(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg \frac{E_C}{E_K} = 3.$	1 pont	
Ebből $\frac{E_C}{E_K} = 1000.$	1 pont	
1000-szer akkora volt a felszabadult energia.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

---

<b>16. d)</b>		
<p>Az ábra jelöléseit használjuk.</p>  <p>Az <math>AKF</math> derékszögű háromszögből:  <math>\cos \alpha = \frac{17}{18}</math>,</p>	1 pont	
$\alpha \approx 19,2^\circ$ . ( $2\alpha \approx 38,4^\circ$ )	1 pont	<i>Elfogadható az <math>\alpha \approx 19^\circ</math> is.</i>
$T_{AKBA} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38,4^\circ}{2} (\approx 100,6 \text{ km}^2)$ .	1 pont	<i>Ha a függvénytáblázatban található, a körszelet területére vonatkozó képletet hibásan alkalmazza, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.</i>
$T_{\text{körcikk}} \approx 18^2 \pi \cdot \frac{38,4^\circ}{360^\circ} (\approx 108,6 \text{ km}^2)$ .	1 pont	
$T_{\text{körszelet}} \approx 108,6 - 100,6 = 8 \text{ (km}^2)$ .	1 pont	
Az elpusztult rész területe körülbelül $8 \text{ km}^2$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>17. a)</b>		
Összesen: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ ,	2 pont	
azaz 840 négyjegyű számot lehet készíteni.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>17. b)</b>		
Az első öt számjegy mindegyike lehet az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül bármelyik, ez összesen $5^5 (= 3125)$ lehetőség.	2 pont	
Az utolsó két számjegy a 4-gyel való oszthatóság miatt csak a következő öt eset valamelyike lehet: 12, 24, 32, 44, 52.	2 pont	<i>Ha 4 jó lehetőséget megad (és rosszat nem) vagy az 5 jó lehetőség mellett 1 rossz is szerepel, akkor 1 pont, más hibás válasz esetén nem jár pont.</i>
Összesen $5^5 \cdot 5$ ,	1 pont	
azaz 15 625 hétjegyű szám alkotható.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>17. c)</b>		
Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyike szerepel a hatjegyű számban, közülük az egyik pontosan kétszer.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont.</i>
Csak a 3-as számjegy lehet az, amelyik kétszer fordul elő,	1 pont	
mert a számjegyek összegének 3-mal oszthatónak kell lennie,	1 pont	
és $1+2+3+4+5 = 15$ (ami osztható 3-mal).	1 pont	
A két 3-as számjegy helyét $\binom{6}{2}$ -féleképpen választhatjuk meg.	1 pont	<i>A megfelelő 6-jegyű számok darabszáma az 1; 2; 3; 3; 4; 5</i>
A megmaradó 4 helyre $4!$ -féleképpen helyezhető el a többi számjegy.	1 pont	<i>karakterek összes permutációinak száma,</i>
A megfelelő hatjegyű számokból összesen $\binom{6}{2} \cdot 4!$ ,	1 pont	<i>tehát <math>\frac{6!}{2!} = 360</math>.</i>
azaz 360 darab van.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>18 a)</b>		
<p>Ábra készítése, adatok feltüntetése.</p>	1 pont	<p><i>Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a pont.</i></p> <p><i>Ha a megadott átmérőkkel mint sugarakkal számol a vizsgáló, akkor ezt a pontot nem kaphatja meg.</i></p>
A csonkakúp $m$ cm magas. (A szimmetria miatt) $ED = 2,5$ cm.	1 pont	
Az $AED$ derékszögű háromszögből ( $AD = 8,5$ ; $AE = m$ ): $m^2 = 8,5^2 - 2,5^2$ , $m \approx 8,1$ .	1 pont	
Ennek 86%-a: $0,86m \approx 7,0$ .	1 pont	
Az $APQ$ és az $AED$ derékszögű háromszögek hasonlóak (mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük közös);	1 pont	
a hasonlóságuk aránya (megfelelő oldalaik hosszának aránya) $0,86$ .	1 pont	<i>A pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a számításokból derül ki.</i>
Ezért $PQ = 0,86 \cdot DE$ , vagyis $PQ = 0,86 \cdot 2,5 = 2,15$ .	1 pont	<i>A <math>PQ \approx 2,2</math> kerekítés is elfogadható.</i>
A síkmetszet sugara: $GQ = 3 + 2,15 = 5,15$ .	1 pont	<i><math>GQ \approx 5,2</math> is elfogadható.</i>
A tejföl térfogata: $V \approx \frac{7,0 \cdot \pi}{3} \cdot (5,15^2 + 3^2 + 5,15 \cdot 3)$ .	1 pont	
$V \approx 372,9$ (cm <sup>3</sup> ).	1 pont	
Tíz cm <sup>3</sup> -re kerekítve a tejföl térfogata $370$ cm <sup>3</sup> .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha <math>GQ \approx 5,2</math>-vel számol és emiatt a tejföl térfogatára – helyes kerekítéssel – <math>380</math> cm<sup>3</sup>-t kap.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	

<b>18. b) első megoldás</b>		
Komplementer eseménnyel számolunk.	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is megkapja, ha ez a gondolat csak a számításokból derül ki.</i>
Sérült doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,03, ezért a jó doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,97.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az ellenőr nem talál selejtes terméket $0,97^{10}$ ,	2 pont	
tehát annak a valószínűsége, hogy talál selejtest $1 - 0,97^{10} (\approx 0,2626)$ .	1 pont	
A keresett valószínűség két tizedesjegyre kerekítve 0,26.	1 pont	<i>Ha a valószínűséget százalékban adja meg a vizsgázó (26%, illetve 26,26%), akkor is jár ez a pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>18. b) második megoldás</b>		
Sérült doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,03, ezért a jó doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,97.	1 pont	
Legyen $P(k)$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott 10 doboz között $k$ darab selejtes van. $P(1) = \binom{10}{1} \cdot 0,03 \cdot 0,97^9 \approx 0,228;$ $P(2) = \binom{10}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^8 \approx 0,032;$ $P(3) = \binom{10}{3} \cdot 0,03^3 \cdot 0,97^7 \approx 0,003;$ $P(4) = \binom{10}{4} \cdot 0,03^4 \cdot 0,97^6 \approx 0,0001.$ Az $5 \leq k \leq 10$ esetben mindegyik valószínűség 0,00001-nél kisebb lesz, tehát a két tizedesjegyre kerekített értéket ezek összege nem befolyásolja.	3 pont	<i>1 pont jár, ha legalább egy esetben jól alkalmazza a binomiális eloszlásra vonatkozó összefüggést (jól helyettesít be). 1 pont jár, ha azt tudja, hogy 10 esetet kell vizsgálnia. Teljes pontszámot (3 pont) akkor kaphat, ha a fent leírt megoldás gondolatmenetét alkalmazva jut jó eredményre, illetve ha mind a 10 esetet helyesen felírja.</i>
A kért valószínűség tehát körülbelül $0,228 + 0,032 + 0,003 = 0,263$ ,	1 pont	
két tizedesjegyre kerekítve 0,26.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	