

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. október 15.**

# **MATEMATIKA**

## **KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

## **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

## I.

<b>1.</b>		
$A \setminus B = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$	2 pont	<i>Egy hiba esetén 1 pont, egynél több hiba esetén 0 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>2.</b>		
$x_1 = -2, x_2 = 10$	1-1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>3.</b>		
$x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = -\frac{\pi}{3}$	1-1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó válasza  $-60^\circ$  és  $60^\circ$ , akkor 1 pontot kapjon. Ha a vizsgázó valós számként adja meg a válaszát, de nem veszi figyelembe a megadott intervallumot, akkor legfeljebb 1 pontot kapjon.*

<b>4.</b>		
A) hamis B) igaz C) hamis	2 pont	<i>2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>5. első megoldás</b>		
A szavazókorú népesség számát jelölje $x$ , ekkor a feladat szövege alapján $x \cdot 0,635 \cdot 0,436 = 4152900$ .	2 pont	
A szavazókorú népesség: $x = 15\,000\,000$ fő.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>5. második megoldás</b>		
A választáson $\frac{4152900}{0,436} =$	1 pont	
$= 9\,525\,000$ fő vett részt.	1 pont	
A szavazókorú népesség: $\frac{9\,525\,000}{0,635} = 15\,000\,000$ fő.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>6.</b>		
$b = 140$	1 pont	
$m = -20$	2 pont	<i><math>m = 20</math> esetén 1 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>7.</b>		
B) és D)	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

*Megjegyzés: 1 jó válasz, illetve 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*

<b>8.</b>		
A számtani sorozat különbségét $d$ -vel jelölve $3d = -15$ ,	1 pont	$\left. \begin{array}{l} a_1 + 5d = 15 \\ a_1 + 8d = 0 \end{array} \right\} \text{egyenlet-} \\ \text{rendszer felírásáért is.}$
amiből $d = -5$ .	1 pont	
A sorozat első tagja 40.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat első kilenc tagjának felsorolásával adja meg választát, akkor is 3 pontot kapjon.*

<b>9.</b>		
A feltételeknek megfelelő gráf.	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

*Megjegyzés: A gráf tartalmazhat többszörös éleket és/vagy hurokéleket is.*

<b>10.</b>		
Az $f$ értékészlete $[0,5; 4]$ .	1 pont	
$a = 0,5$	2 pont	<i>Egy jó egyenlet felírásáért (pl. <math>a^1 = 0,5</math>) 1 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>11.</b>		
A szabályos dobókockán szereplő számok mindegyike osztója a 60-nak,	2 pont	
így a kért esemény (a biztos esemény, melynek) valószínűsége 1.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>12.</b>		
A jónatán alma mennyisége 36 (kg).	1 pont	
Az idared almák arányát jelölő körcikk középponti szöge 150 (fok),	1 pont	
így az idared alma mennyisége 60 (kg).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

## II. A

<b>13. a)</b>		
( $4x + 21 \geq 0$ és $x + 4 \geq 0$ ) Négyzetre emelve mindkét oldalt: $x^2 + 8x + 16 = 4x + 21$ .	2 pont	
Rendezve: $x^2 + 4x - 5 = 0$ .	1 pont	
$x_1 = -5$ , $x_2 = 1$	1 pont	
A $-5$ nem megfelelő gyök, az $1$ megfelelő gyök.	1 pont	<i>Kikötés vagy ellenőrzés alapján.</i>
	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>13. b) első megoldás</b>		
(Behelyettesítő módszerrel:) $y = 16 - 3x$	1 pont	
$5x - 32 + 6x = 45$	1 pont	
$11x = 77$	1 pont	
$x = 7$	1 pont	
$y = -5$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>13. b) második megoldás</b>		
(Az egyenlő együtthatók módszerével, az első egyenlet mindkét oldalát 2-vel szorozva:) $\left. \begin{array}{l} 6x + 2y = 32 \\ 5x - 2y = 45 \end{array} \right\}$	2 pont	
$11x = 77$	1 pont	
$x = 7$	1 pont	
$y = -5$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>14. a) első megoldás</b>		
Az $ADC$ háromszög $C$ csúcsához tartozó magasság hossza: $41 \cdot \sin 47^\circ \approx$	1 pont	
$\approx 30$ (mm).	1 pont	
Ez ugyanakkora, mint az $ABC$ háromszög $C$ csúcsához tartozó magassága,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
így a kért terület $T \approx \frac{48 \cdot 30}{2} =$	1 pont	
$= 720 \text{ mm}^2$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>14. a) második megoldás</b>		
Az $ADC$ háromszög területe: $\frac{24 \cdot 41 \cdot \sin 47^\circ}{2} \approx$	1 pont	
$\approx 360 \text{ (mm}^2\text{)}.$	1 pont	
A $CD$ súlyvonal felezi az $ABC$ háromszög területét,	2 pont	<i>Ez a 2 pont jár a <math>BCD</math> háromszög területének kiszámításáért is, illetve akkor is, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
így a kért terület $720 \text{ mm}^2$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>14. b)</b>		
A $CDB$ szög $133^\circ$ .	1 pont	
$BC = \sqrt{24^2 + 41^2 - 2 \cdot 24 \cdot 41 \cdot \cos 133^\circ}$	2 pont	<i>Annak felismerése, hogy a <math>BC</math> oldal koszinusztétellel kiszámítható: 1 pont.</i>
Így a $BC$ oldal hossza a kért kerekítéssel valóban $60 \text{ mm}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>14. c) első megoldás</b>		
Az $ABC$ szög legyen $\beta$ , ekkor a szinusztételt felírva a $BCD$ háromszögben: $\frac{\sin \beta}{\sin 133^\circ} = \frac{41}{60}$ .	1 pont	
$\sin \beta \approx 0,4998$ ,	1 pont	
amiből (mivel a $BCD$ háromszög $D$ csúcsánál lévő belső szöge tompaszög) $\beta \approx 30^\circ$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>14. c) második megoldás</b>		
Az $ABC$ szög legyen $\beta$ , ekkor a koszinusztételt felírva a $BCD$ háromszögben: $41^2 = 24^2 + 60^2 - 2 \cdot 24 \cdot 60 \cdot \cos \beta$	1 pont	
$\cos \beta = \frac{24^2 + 60^2 - 41^2}{2 \cdot 24 \cdot 60} (\approx 0,8663),$	1 pont	
amiből $\beta \approx 30^\circ$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>15. a) első megoldás</b>		
A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje $x$ , a mikrohullámú sütővel rendelkezők száma ekkor $2x$ .	1 pont	
Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek: $2x + x - 63 = 141$ ,	2 pont	
amiből $x = 68$ .	1 pont	
Nincs mikrohullámú sütője ( $150 - 2 \cdot 68 =$ ) 14 meg- kérdezettnek,	1 pont	
ők az összes megkérdezett kb. 9,3%-át jelentik.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>15. a) második megoldás</b>		
Azok számát, akik mosogatógéppel rendelkeznek, de mikrohullámú sütővel nem, jelölje $y$ . Ekkor összesen $y + 63$ azok száma, akik mosogató- géppel rendelkeznek.	1 pont	
A mikrohullámú sütővel rendelkező, de mosogató- géppel nem rendelkezők száma: $2(y + 63) - 63 = 2y + 63$ .	1 pont	
Az összes megkérdezett száma: $y + (2y + 63) + 63 + 9 = 150$ ,	1 pont	
amiből $y = 5$ .	1 pont	
Nincs mikrohullámú sütője ( $5 + 9 =$ ) 14 megkérde- zettnek,	1 pont	
ők az összes megkérdezett kb. 9,3%-át jelentik.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>15. b)</b>		
Az egy háztartásban található számítógépek számá- nak átlaga $\frac{3 \cdot 0 + 94 \cdot 1 + 89 \cdot 2 + 14 \cdot 3}{200} =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolat- menete helyes volt.</i>
$= 1,57$ .	1 pont	<i>1,6 is elfogadható.</i>
A medián 2,	1 pont	
a módusz 1.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>15. c)</b>		
Az állítás tagadásai: C és D.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

*Megjegyzés: 1 jó válasz, illetve 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*

## II. B

<b>16. a)</b>		
A henger alapkörének sugara $2,5 \cdot 10^{-7}$ (m),	1 pont	
térfogata $V = (2,5 \cdot 10^{-7})^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ ,	1 pont	
normálalakban $V \approx 3,9 \cdot 10^{-19}$ (m <sup>3</sup> ).	1 pont	
A henger felszíne $A = 2 \cdot (2,5 \cdot 10^{-7})^2 \cdot \pi + 5 \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ ,	1 pont	
normálalakban $A \approx 3,5 \cdot 10^{-12}$ (m <sup>2</sup> ).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>16. b)</b>		
A kólibaktériumok száma 1,5 óra alatt 6-szor duplázódott,	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
ezért 1,5 óra után $3\,000\,000 \cdot 2^6 =$	1 pont	
$= 192$ millió lesz a baktériumok száma.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>16. c)</b>		
(A baktériumok száma $x$ perc múlva lesz 600 millió.) Meg kell oldanunk a $3 \cdot 2^{\frac{x}{15}} = 600$ egyenletet.	2 pont	
$2^{\frac{x}{15}} = 200$	1 pont	
$\frac{x}{15} = \log_2 200$	2 pont	$\frac{x}{15} \cdot \lg 2 = \lg 200$
$x = 15 \cdot \frac{\lg 200}{\lg 2}$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
amiből $x \approx 115$ adódik, tehát	1 pont	
115 perc múlva lesz a baktériumok száma 600 millió.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>17. a)</b>		
$\vec{AB}(6; 2)$	1 pont	
Az $e$ egyenes egy normálvektora: $\mathbf{n}(1; -3)$ ,	1 pont	
egyenlete: $x - 3y = 7 - 3 \cdot (-1)$ ,	1 pont	
$x - 3y = 10$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	



<b>17. b)</b>		
$1^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 10$ , (tehát az $A$ pont illeszkedik a $k$ körre.)	1 pont	
$7^2 + (-1)^2 - 6 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) = 10$ , (tehát a $B$ pont is illeszkedik a $k$ körre.)	1 pont	
Az $AB$ húr hossza $\sqrt{(7-1)^2 + (-1+3)^2} =$	1 pont	
$= \sqrt{40} (\approx 6,32)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>17. c) első megoldás</b>		
Az $f$ egyenes egy normálvektora: $\vec{AB}(6; 2)$	1 pont	
Az $f$ egyenes egyenlete $3x + y = 0$ .	2 pont	
A metszéspont koordinátáit a $k$ kör és az $f$ egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Az $f$ egyenes egyenletéből $y = -3x$ .	1 pont	
Ezt a kör egyenletébe helyettesítve: $x^2 + 9x^2 - 6x - 2 \cdot (-3x) = 10$ .	1 pont	
$x^2 = 1$	1 pont	
Ennek (az 1-től különböző) megoldása $x = -1$ .	1 pont	
Így a keresett pont a $C(-1; 3)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

<b>17. c) második megoldás</b>		
Az $A$ -tól különböző metszéspontot $C$ -vel jelölve, a Thalész-tétel megfordításának felhasználásával tudjuk, hogy a $BC$ húr a $k$ kör átmérője.	3 pont	
A $k$ kör egyenletét átalakítva: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$ .	2 pont	
Így a kör középpontja a $K(3; 1)$ pont.	1 pont	
A $K$ pont felezi az $BC$ szakaszt, így a $C(x_C; y_C)$ pont koordinátáira: $\frac{x_C+7}{2} = 3$ és $\frac{y_C-1}{2} = 1$ ,	2 pont	
amiből $C(-1; 3)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a kör egyenletét átalakítva a kör középpontjának koordinátáit jól megállapítja és koordinátarendszerben a körvonalat ábrázolja, akkor ezért 3 pontot kapjon. Ha az ábrába berajzolja a kérdéses  $f$  egyenest, és indoklás és ellenőrzés nélkül megállapítja a  $C$  metszéspont koordinátáit, akkor ezekért további 2 pontot kapjon.*

*A vizsgázó még 2 pontot kapjon, ha indokolja, hogy az általa rajzolt egyenes miért merőleges az  $AB$  szakaszra, és további 2 pontot akkor, ha a kapott  $C$  pont koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve ellenőrzi, hogy az valóban illeszkedik a körvonalra.*

<b>18. a) első megoldás</b>		
Két lapot kiválasztunk a 30-ból, ezt $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} (= 435)$ -féleképpen lehet megtenni (összes eset száma).	2 pont	
A kedvező esetek száma (amikor a két lapon szereplő számok megegyeznek) 15.	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{15}{435} \left( = \frac{1}{29} \approx 0,0345 \right)$ .	1 pont	<i>Százalékban megadott helyes válaszáért is jár ez a pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>18. a) második megoldás</b>		
Az elsőre kiválasztott lap tetszőleges lehet.	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
A második lap esetében 29-ből (összes eset száma) kell kiválasztanunk	1 pont	
az elsőnek választott lap egyetlen párját.	1 pont	
Ennek valószínűsége $\frac{1}{29} (\approx 0,0345)$ .	1 pont	<i>Százalékban megadott helyes válaszáért is jár ez a pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>18. b) első megoldás</b>		
Összesen 7 olyan kő van, amelyen a két részben azonos a pöttyök száma.	2 pont	
A kő két részén (a két részt megkülönböztetve) különböző számú pöttyöt $7 \cdot 6 = 42$ -féleképpen lehetne elhelyezni,	2 pont	
de így minden ilyen követ kétszer számolnánk, ezért ezek száma 21.	1 pont	
Összesen 28 kő van a teljes készletben.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>18. b) második megoldás</b>		
Rendezzük a köveket úgy, hogy mindegyiknek a bal oldali részén legyen legalább annyi pötty, mint a jobb oldalán.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Összesen 7 olyan kő van, amelynek a bal oldali részén 6 pötty van. (Ezek a 6-0, a 6-1, a 6-2, a 6-3, a 6-4, a 6-5 és a 6-6 kövek).	1 pont	
További 6 olyan kő van, amelynek bal oldalán 5 pötty van,	1 pont	
és így tovább, egészen addig az egyetlen köig, amelynek mindkét része üres (0-0-s kő).	1 pont	
Így összesen $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$	1 pont	
$= 28$ kő van a teljes készletben.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes eset felsorolásával jól adja meg a választ, akkor jár a 6 pont.*

<b>18. c)</b>		
Aki pontosan a harmadik dobására kezdi el a játékot, az az első két dobásánál öt-öt-félét dobhatott,	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
a harmadikra viszont csak egyfélét (hatost).	1 pont	
Így a kedvező esetek száma $5 \cdot 5 \cdot 1$ .	1 pont	
Az összes eset száma: $6^3$ .	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{25}{216}$ ( $\approx 0,1157$ ).	2 pont	<i>Százalékban megadott helyes válaszáért is jár ez a 2 pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	