ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2013. május 7.

MATEMATIKA
FRANCIA NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTÉRIUMA

Instructions importantes

Les prescriptions de forme:

1. La copie doit être corrigée **au stylo de couleur différente** de celle utilisée par le candidat, et il faut indiquer les fautes, les lacunes etc. selon la pratique pédagogique.
2. Le nombre de points maximal apparaît dans le premier des rectangles se trouvant à côté des exercices, et **le nombre de points** donné par l'examinateur doit figurer dans **le rectangle** adjacent.
3. **En cas de solution impeccable,** il est suffisant d'inscrire le nombre de points maximal dans les rectangles correspondants.
4. En cas de solution incomplète ou fausse, veuillez écrire **les nombres de points partiels** aussi sur la copie.

Les demandes de contenu:

1. A certains exercices, on a donné l'évaluation de plusieurs variantes de résolution. Si une **résolution en diffère,** recherchez-y les parties de résolution qui équivalent à certains détails du guide, et proposez des points en fonction.
2. Les points proposés par le guide d'évaluation **peuvent être décomposés**. Toutefois, les points proposables doivent être entiers.
3. On peut donner le nombre maximal des points pour des raisonnements et résultats évidemment corrects, même si la copie est **moins détaillée** que la proposition du guide d'évaluation.
4. Si dans la solution on rencontre **une erreur de calcul** ou une inexactitude alors on enlève seulement les points de la partie où l'étudiant a commis l'erreur. S'il continue le calcul en utilisant le résultat partiel faux mais par un raisonnement juste et le problème n'a pas été fondamentalement modifié alors il a droit aux points partiels ultérieurs.
5. **En cas d'une erreur de principe,** dans une même unité conceptuelle (dans le guide, elles sont séparées de double ligne), on n'accorde aucun point même si certaines étapes mathématiques sont formellement correctes. Cependant si le candidat continue le calcul, à la base du faux résultat issu de l'erreur de principe, mais d'une manière juste dans l'unité conceptuelle ou la question partielle suivante, et le problème n'a pas été fondamentalement modifié alors il a droit au point maximal de cette partie.
6. Si une **unité de mesure** ou une **remarque** est mise entre parenthèses dans le guide alors même en l'absence de celle-ci, la solution est complète.
7. Sur les différentes tentatives de solution correctes données à un exercice, **seule la variante indiquée par le candidat peut être évaluée**.
8. **On ne peut pas accorder de bonus** aux solutions (à savoir un nombre de points dépassant le maximum des points voulus pour l'exercice ou partie d'exercice donné.)
9. **Un enlèvement de points ne doit pas se faire** pour des calculs partiels, étapes partielles qui sont faux mais ne sont pas effectivement utilisés.
10. **La résolution de seulement 4 exercices peut être évaluée sur les 5 proposés de la II^{e} partie de l'épreuve écrite.** Dans le carré correspondant, le candidat a - vraisemblablement- marqué le numéro de l'exercice dont il ne désire pas l'évaluation dans la somme totale des points. De sorte qu'il ne faut même pas corriger la solution éventuellement donnée à l'exercice marqué. Si le candidat ne marque pas d'une manière univoque le numéro de l'exercice dont l'évaluation n'est pas demandée alors c'est automatiquement le dernier exercice dans l'ordre proposé qu'il ne faudra pas évaluer.

I.

1. a)

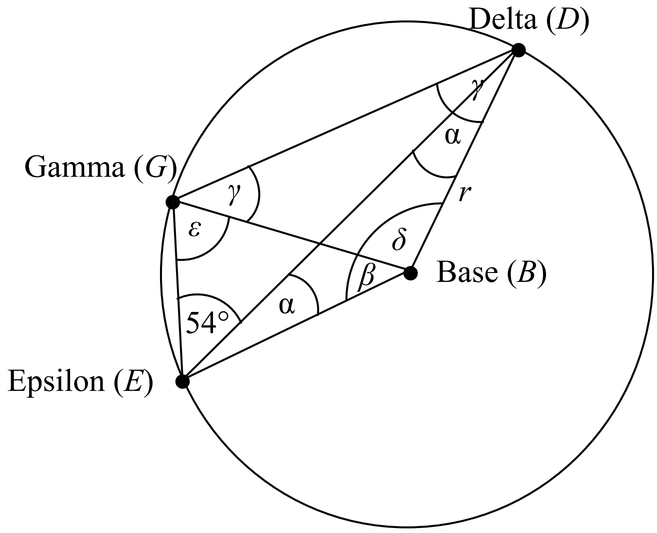
Les nombres x sont des solutions possibles seulement s'ils vérifient que $0,5 < x$.	1 point	*Ce point doit être accordé même s'il compare la solution correcte à l'ensemble de définition.*
Puisque $0 = \log_{\frac{1}{5}} 1$,	1 point	
et la fonction logarithme de base $\frac{1}{5}$ est strictement décroissante, alors $2x - 1 > 1$,	1 point	
d'où $x > 1$. (Ces nombres réels satisfont à la condition initiale aussi.)	1 point	
Total:	**4 points**	

1. b)

$1 = 2^0$, et	1 point	*On accorde ces deux points pour l'écriture de l'inégalité correcte même sans justification.*
puisque la fonction exponentielle de base 2 est strictement croissante, alors $\lvert 2x - 1\rvert - 2 > 0$,	1 point	
d'où $\lvert 2x - 1\rvert > 2$. Cette inégalité est satisfaite dans le seul cas si $2x - 1 > 2$, ou	1 point	*Il a droit à ces 4 points même s'il lit la solution du graphique (2 points) et vérifie si les extrémités lues sont exactes. (2 points)*
$2x - 1 < -2$.	1 point	
Alors $x > 1{,}5$, ou	1 point	
$x < -0{,}5$. (L'ensemble de solutions: $]-\infty\,;\,-0{,}5\,[\cup]\,1{,}5\,;\,+\infty\,[$)	1 point	
Total:	**6 points**	

2. a)

La diminution 1 : 500 000 signifie que 1 cm sur la carte équivaut à 500 000 cm dans la réalité,	1 point	
c'est-à-dire 5 km.	1 point	
Alors la distance entre la base et les plates-formes est $3{,}5 \cdot 5 = 17{,}5$ km.	1 point	
Total:	**3 points**	*Même sans justification, le résultat final correct vaut également 3 points.*

2. b) **la première variante de résolution**		
		
Avec les notations du schéma : les triangles *EBD*, *BEG* et *BGD* sont isocèles parce que le point *B* est à égale distance de tous les trois autres points.	1 point	
$\beta+\delta=142°$, $\alpha=\frac{180°-142°}{2}=19°$,	1 point	
$\varepsilon=54°+19°=73°$,	1 point	
$\beta=180°-2\cdot73°=34°$,	1 point	
$\delta=142°-34°=108°$.	1 point	
D'après le théorème de cosinus (d'Al-Kashi) :	1 point	
$GD=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot17{,}5^2\cdot\cos108°}\approx28{,}3$ (km),	1 point	
$EG=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot17{,}5^2\cdot\cos34°}\approx10{,}2$ (km),	1 point	
$ED=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot17{,}5^2\cdot\cos142°}\approx33{,}1$ (km).	1 point	
La longueur totale de l'itinéraire de lundi : $BE+EG+GD+DB=17{,}5+10{,}2+28{,}3+17{,}5=$ $=73{,}5\approx74$ km.	1 point	
La longueur totale de l'itinéraire de jeudi : $BG+GE+ED+DB=17{,}5+10{,}2+33{,}1+17{,}5=$ $=78{,}3\approx78$ km.	1 point	
Total:	**11 points**	

2. b) **la deuxième variante de résolution**		
Le centre du cercle circonscrit au triangle *EDG* est *B*, son rayon est de $r = 17{,}5$ (km), parce que le point *B* est à cette distance de tous les trois autres points.	1 point	
L'angle au centre *GBD* mesure 108°,	1 point	
parce qu'il est le double de l'angle inscrit *GED* de 54°.	1 point	
L'angle au centre *EBG* mesure 142°–108°= 34°.	1 point	
Selon la relation des angles inscrits et au centre, $EDG\angle = 17°$,	1 point	
et $EGD\angle = 109°$.	1 point	
On calcule les côtés du triangle *EDG* avec la formule $a = 2r\sin\alpha$: $GD = 35 \cdot \sin 54° \approx 28{,}32$ km,	1 point	
$EG = 35 \cdot \sin 17° \approx 10{,}23$ km,	1 point	
$ED = 35 \cdot \sin 109° \approx 33{,}09$ km.	1 point	
La longueur totale de l'itinéraire de lundi : $BE + EG + GD + DB = 17{,}5 + 10{,}23 + 28{,}32 + 17{,}5 =$ $= 73{,}55 \approx 74$ km.	1 point	
La longueur totale de l'itinéraire de jeudi : $BG + GE + ED + DB \approx 17{,}5 + 10{,}23 + 33{,}09 + 17{,}5 =$ $= 78{,}32 \approx 78$ km.	1 point	
Total:	**11 points**	
Si on arrondit les côtés du triangle EGD à l'entier, alors DG=28, EG=10, ED=33, la longueur de l'itinéraire de lundi est alors 73 km, celle de jeudi est de 78 km. Ce moyen de calcul est à accepter aussi.		

<table>
<tr><td colspan="3">3. a)</td></tr>
<tr><td>Dans le nombre abb_3 à trois chiffres étant dans le système de numération de base trois, le chiffre b peut être de trois sortes, le chiffre a de deux sortes, par conséquent il existe 6 nombres de forme abb_3.</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>Écrivons ces nombres dans le système décimal et de base trois aussi:
<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>abb_3</td><td>décimal</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>100</td><td>9</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>111</td><td>13</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>122</td><td>17</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>200</td><td>18</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>211</td><td>22</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>222</td><td>26</td></tr></table></td><td>3 points</td><td>L’écriture d’au moins 8 nombres corrects sur les 12 vaut 1 point, celle des 11 nombres corrects sur les 12 vaut 2 points.</td></tr>
<tr><td>Parmi ces nombres, trois satisfont aux conditions de l’exercice :
le $200_3 = 18$, le $211_3 = 22$ et le $222_3 = 26$.</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>Total:</td><td>5 points</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">3. b) la première variante de résolution</td></tr>
<tr><td>L’ensemble de 5 éléments a $2^5 = 32$ sous-ensembles,</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>parmi lesquels un n’a aucun élément,</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>5 ont un seul élément,</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>donc le nombre des sous-ensembles ayant au moins deux éléments : $32 - 6 = 26$.</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>Le produit des éléments n’est pas divisible par trois uniquement dans les ensembles dont les éléments sont choisis des nombres 2, 4 ou 5.</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>Il y a $\binom{3}{2} = 3$ sous-ensembles de deux éléments,</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>1 de trois éléments.</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>Le nombre des sous-ensembles convenables est alors $(26 - 4 =)$ 22.</td><td>1 point</td><td></td></tr>
<tr><td>Total:</td><td>8 points</td><td></td></tr>
</table>

3. b) **la deuxième variante de résolution**		
On dénombre les sous-ensembles ayant au moins deux éléments de l'ensemble $\{2; 3; 4; 5; 6\}$dans lesquels le produit des éléments est divisible par 3,	1 point	
c'est-à-dire que parmi les éléments il y en a de divisible par 3 aussi (le 3 ou le 6).	1 point	
Il y a 8 sous-ensembles dont le 3 est un élément mais le 6 ne l'est pas ($8 = 2^3$, on peut choisir l'un des éléments 2, 4, 5 à côté du 3),	1 point	
parmi lesquels il y en a 7 ayant au moins deux éléments parce que $\{3\}$, l'ensemble à un élément, figure également parmi les 8 sous-ensembles ci-dessus.	1 point	
Il y a 8 sous-ensembles dont le 6 est élément mais le 3 ne l'est pas ($8 = 2^3$, on peut choisir l'un des éléments 2, 4, 5 à côté du 6),	1 point	
parmi lesquels il y en a 7 ayant au moins deux éléments parce que $\{6\}$, l'ensemble à un élément, est également parmi les 8 sous-ensembles ci-dessus.	1 point	
Le nombre des sous-ensembles ayant au moins deux éléments, dont le 3 et le 6 aussi est un élément, est également 8 ($8 = 2^3$, on peut choisir l'un des éléments 2, 4, 5 à côté du 3 et du 6).	1 point	
Alors le nombre des sous-ensembles convenables est $(7 + 7 + 8 =)$ 22.	1 point	
Total:	**8 points**	

3. b) la troisième variante de résolution		
Le produit des éléments des sous-ensembles ayant au moins deux éléments est divisible par 3 dans le seul cas où parmi ses éléments il y en a de divisible par trois (donc le 3 ou le 6 figure parmi les éléments, au moins l'un des deux).	1 point	
Il y a $\binom{5}{2}=10$ sous-ensembles à deux éléments,	1 point	
parmi lesquels $\binom{3}{2}=3$ ne contiennent ni le 3 ni le 6.	1 point	
Il y a $\binom{5}{3}=10$ sous-ensembles à trois éléments,	1 point	
parmi lesquels il n'y a qu'un seul ({2 ; 4 ; 5}) qui ne contient ni le 3 ni le 6.	1 point	
Le 3 ou le 6, au moins l'un des deux, figure dans chaque sous-ensemble à quatre éléments, donc ils sont tous convenables.	1 point	
Le nombre des sous-ensembles ayant au moins quatre éléments est $\left(\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=\right)6$.	1 point	
Alors le nombre total des sous-ensembles correspondants: 7 + 9 + 6 = 22.	1 point	
Total:	**8 points**	

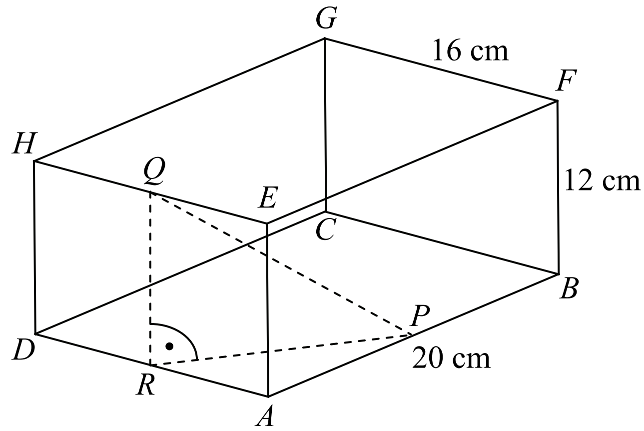
Remarque:

1. Dans le tableau ci-dessous, on énumère tous les sous-ensembles ayant au moins deux éléments et ceux qui satisfont aux exigences du problème:

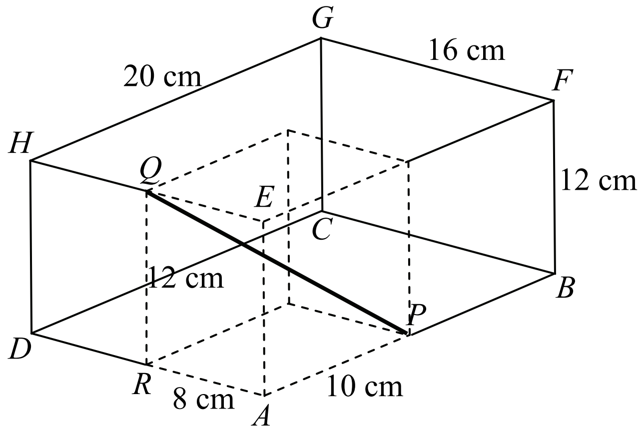
sous-ensembles	tous	le produit des éléments est divisible par 3
à 2 éléments	$\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{2;6\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, $\{3;6\}$, $\{4;5\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$.	$\{2;3\}$, $\{2;6\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, $\{3;6\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$.
à 3 éléments	$\{2;3;4\}$, $\{2;3;5\}$, $\{2;3;6\}$, $\{2;4;5\}$, $\{2;4;6\}$, $\{2;5;6\}$, $\{3;4;5\}$, $\{3;4;6\}$, $\{3;5;6\}$, $\{4;5;6\}$.	$\{2;3;4\}$, $\{2;3;5\}$, $\{2;3;6\}$, $\{2;4;6\}$, $\{2;5;6\}$, $\{3;4;5\}$, $\{3;4;6\}$, $\{3;5;6\}$, $\{4;5;6\}$.
à 4 éléments	$\{2;3;4;5\}$, $\{2;3;4;6\}$, $\{2;3;5;6\}$,. $\{2;4;5;6\}$, $\{3;4;5;6\}$.	$\{2;3;4;5\}$, $\{2;3;4;6\}$, $\{2;3;5;6\}$, $\{2;4;5;6\}$, $\{3;4;5;6\}$.
à 5 éléments	{2; 3; 4; 5; 6}	{2; 3; 4; 5; 6}

2. La résolution est considérée complète si de tous les sous-ensembles le candidat sélectionne (énumère) ceux qui ne satisfont pas aux exigences de l'exercice.
3. Le candidat a droit à 6 points au plus s'il n'énumère que les sous-ensembles correspondants, sans signaler pourquoi son énumération est complète.
4. Si le candidat applique le crible logique, l'évaluation est la suivante:
« le 3 est dedans » + « le 6 est dedans » – « le 3 et le 6 sont dedans » *4 points*
$\left(2^4-1\right)+\left(2^4-1\right)-2^3=15+15-8=22$ *4 points*

4. a) la première variante de résolution



Soit R le milieu de l'arête AD. Alors le triangle PRQ est rectangle en R.	1 point	*Ce point doit être accordé même si cette idée n'apparaît que lors de la résolution.*
Dans le triangle rectangle PAR (du théorème de Pythagore): $PR^2 = 10^2 + 8^2 (= 164)$.	1 point	
Puisque QR=AE=12 (cm), dans le triangle rectangle PRQ (du théorème de Pythagore):	1 point	
$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = 12^2 + 10^2 + 8^2$. $PQ = \sqrt{308}$ $(\approx 17{,}55)$ (cm).	1 point	
Total:	**4 points**	

4. a) **la deuxième variante de résolution**		
		
PQ est l'une des diagonales du parallélépipède rectangle dont l'un des sommets est *A* dont les trois arêtes issues de *A* sont de 10 cm, 8 cm et 12 cm.	2 points	
La longueur de la diagonale *PQ* du solide est alors : $PQ=\sqrt{12^2+10^2+8^2}=\sqrt{304}$ $(\approx 17{,}55)$ (cm).	2 points	*1 point pour l'application correcte de la formule relative à la diagonale du solide,* *1 point pour le calcul correct.*
Total:	**4 points**	

4. b)		
Pour choisir les différentes paires d'arêtes, on a autant de possibilités qu'en choisissant deux éléments sur 12 sans tenir compte de leur ordre.	1 point	*En cas de solution correcte, ce point doit être accordé même si le candidat n'écrit pas cette explication*
Pour cette raison, le nombre des différentes paires de droites: $\binom{12}{2}$,	1 point	
dont la valeur est $\left(\frac{12\cdot 11}{2}=\right)66$.	1 point	
Total:	**3 points**	

4. c)		
Chaque droite portant une arête est coupée par 4 autres, donc le nombre des paires de droites sécantes: $\frac{12\cdot 4}{2}=24$.	2 points	*1 point pour la méthode correcte du dénombrement même si le raisonnement correct n'apparaît que lors de la résolution.*
Chaque droite portant une arête est parallèle à 3 autres, donc le nombre des paires de droites parallèles: $\frac{12\cdot 3}{2}=18$.	1 point	
Chaque droite portant une arête est non-coplanaire à 4 autres, donc le nombre des paires de droites non-coplanaires : $\frac{12\cdot 4}{2}=24$.	1 point	
Total:	**4 points**	
Si on calcule le résultat des deux cas sur les 3, et on utilise le résultat de l'exercice b), on peut obtenir le résultat du troisième cas. Si le candidat suit cette méthode, mais il donne sa réponse (erronée) en calculant correctement à la base du faux résultat obtenu dans b), il a droit à tous les points de la partie c), à condition qu'il ne commette pas d'autre erreur.		

4. d)		
La distance entre deux droites non-coplanaires portant des arêtes est la longueur de l'arête se trouvant sur la droite perpendiculaire à toutes les deux droites (transversale normale).	1 point	*Ce point est accordable si les distances sont marquées sur le schéma, mais la justification n'est pas écrite.*
La distance entre les droites portant l'arête AE et FG (ou BC) est ($EF = AB =$) 20 cm.	1 point	
La distance entre les droites portant l'arête AE et HG (ou DC) est ($EH = AD =$) 16 cm.	1 point	
Total:	**3 points**	

II.

5. a) la première variante de résolution		
La raison de la suite géométrique est un nombre positif inférieur à 1, donc la suite S_n formée des sommes est convergente,	1 point	
sa limite : $s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{32}{1-\frac{1}{128}}=\frac{4096}{127}\left(\approx 32{,}25\right)$.	2 points	
(Puisque tous les termes de la suite géométrique sont positifs, la suite S_n est croissante d'où), $S_n<s=\frac{4096}{127}<32{,}5$, alors la proposition est vraie.	1 point	
Total:	**4 points**	

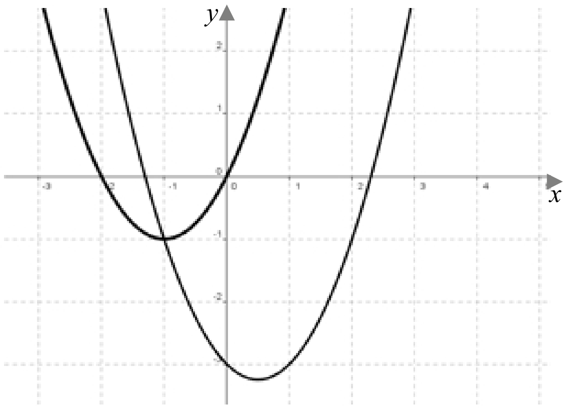
5. a) la deuxième variante de résolution		
La somme des n premiers termes de la suite géométrique : $S_n=\frac{32\cdot\left(\frac{1}{128^n}-1\right)}{\frac{1}{128}-1}$, $S_n=\frac{2^{12}}{127}\cdot\left(1-\frac{1}{128^n}\right)$.	1 point	
La suite $\{S_n\}$ est strictement croissante, (parce que la suite $\left\{\frac{1}{128^n}\right\}$ est strictement décroissante),	1 point	
et $S_n<\frac{2^{12}}{127}$ pour tout n.	1 point	
$\left(S_n<\right)\frac{2^{12}}{127}=\frac{4096}{127}<32{,}5$, donc la proposition est vraie.	1 point	
Total:	**4 points**	

5. b)		
$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n =$ $= \frac{1}{128} \cdot \frac{32}{128} \cdot \frac{32^2}{128} \cdot \ldots \cdot \frac{32^{k-1}}{128} \cdot \ldots \cdot \frac{32^{n-1}}{128} =$	1 point	
$= \frac{32^{1+2+3+\ldots+n-1}}{128^n}$	1 point	
L'exposant du numérateur est la somme des n–1 entiers positifs, dont la formule explicite est $\frac{n(n-1)}{2}$.	2 points	
Puisque $32 = 2^5$ et $128 = 2^7$, alors $\frac{32^{1+2+3+\ldots+n-1}}{128^n} = \frac{2^{5\cdot\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{7n}}$.	1 point	
Puisque $2048 = 2^{11}$, il faut résoudre l'équation $\frac{2^{5\cdot\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{7n}} = \left(2^{11}\right)^{3n}$.	1 point	
En la transformant $2^{5\cdot\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{7n} \cdot 2^{33n} = 2^{40n}$,	1 point	
d'où à cause de la bijectivité de la fonction exponentielle (monotonie stricte)	1 point	
découle $5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 40n$.	1 point	
(La valeur de n est entière positive), on peut diviser par n, donc $\frac{5}{2}(n-1) = 40$.	1 point	
La seule racine de cette équation est $n = 17$.	1 point	
La seule racine de l'équation originale est alors $n = 17$.	1 point	
Total:	**12 points**	

6. a) la première variante de résolution		
Les deux paraboles ont un point commun sur l'axe des x dans le seul cas où les équations du second degré $x^2 + px + 1 = 0$ et $x^2 - x - p = 0$ ont une racine commune.	1 point	
La racine commune est la solution de l'équation $x^2 + px + 1 = x^2 - x - p$.	2 points	
Après le rangement: $x(p+1) = -(p+1)$.	1 point	
Si $p = -1$ alors tous les nombres réels sont la solution de l'équation, donc les deux paraboles sont confondues ($y = x^2 - x + 1$). Ce cas alors n'est pas convenable.	1 point	
Si $p \neq -1$,	1 point	
alors la seule possibilité est que $x = -1$. Dans ce cas $p = 2$.	1 point	
Alors l'équation des deux paraboles est $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^2 - x - 2$. (Leur point commun est le point (–1 ; 0).)	1 point	
Total:	**8 points**	

6. a) la deuxième variante de résolution		
Les deux paraboles ont un point commun sur l'axe des x dans le seul cas où les équations du second degré $x^2+px+1=0$ et $x^2-x-p=0$ ont une racine commune.	1 point	
x_1 et x_2 désignent les deux racines (n'étant pas forcément distinctes) de l'équation $x^2+px+1=0$, x_1' et x_2' soient celles de l'équation $x^2-x-p=0$. En appliquant les relations de Viéte :	1 point	
$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=1 \end{array}\right\}$ et $\left.\begin{array}{l} x_1'+x_2'=1 \\ x_1'\cdot x_2'=-p \end{array}\right\}$	1 point	
(1^e) Les deux équations ont les mêmes solutions ($x_1=x_1$'et $x_2=x_2$'). Dans ce cas-là, la seule possibilité $p=-1$. Mais alors les deux équations décrivent la même parabole d'équation $y=x^2-x+1$, ce qui est exclu par la condition.	1 point	
(2^e) Si les deux ensembles de solutions ne sont pas égaux, mais ils ont des éléments communs, p. ex. $x_1=x_1$'. D'après les deuxièmes équations des équations provenues des relations de Viéte $x_1\cdot x_2=1$ et $x_1\cdot x_2'=-p$ d'où $x_2'=-px_2$. D'après les premières équations des équations provenues des relations de Viéte $x_1+x_2=-p$ et $x_1-px_2=1$. De la différence des membres correspondants des deux équations on trouve $x_2(p+1)=-(p+1)$.	1 point	
Si $p=-1$ alors le (1^e) cas est réalisé.	1 point	
Si $p\neq-1$ alors $x_2=-1$ et $p=2$.	1 point	
Alors l'équation des deux paraboles est $y=x^2+2x+1$ et $y=x^2-x-2$. (Leur point commun est le point (–1 ; 0).)	1 point	
Total:	**8 points**	

6. b)



L'esquisse des paraboles d'équation $y = x^2 + 2x$ et $y = x^2 - x - 3$.	2 points	*1 point pour la représentation correcte de chacune des paraboles.*
La première coordonnée du point commun des paraboles est –1.	1 point	
Considérons les fonctions $f : [-1; 0] \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 + 2x$ et $g : [-1; 0] \to \mathbf{R},\ g(x) = x^2 - x - 3$. L'aire de la figure en question : $T = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx$.	1 point	*Si le candidat calcule d'abord séparément l'intégrale de chacune des fonctions et puis effectue la soustraction, au cas d'un calcul juste, il a droit aux 5 points*
$T = \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x - \left(x^2 - x - 3\right)\right)dx = \int_{-1}^{0} (3x + 3)dx =$	2 points	
$= \left[\frac{3x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{0} =$	1 point	
$= 0 - \left(\frac{3}{2} - 3\right) = \frac{3}{2}$	1 point	
Total:	**8 points**	

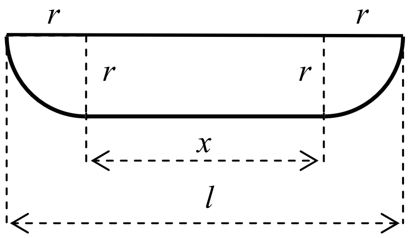
7. a)

1. faux	1 point	*Le point est accordable pour une réponse univoque et correcte.*
2. faux	1 point	
3. vrai	1 point	
4. vrai	1 point	
5. faux	1 point	
Total:	**5 points**	

7. b)		
Selon les statistiques, la probabilité qu'un SMS envoyé ne parvient pas est $\frac{1}{60}$, ou à peu près 0,0167,	1 point	*Ces 2 points doivent être accordés au candidat même si cette idée n'apparaît que lors de sa résolution.*
alors la probabilité qu'il arrive au destinataire est 1–0,0167=0,9833.	1 point	
La probabilité qu'exactement un SMS sur les trois envoyés ne parvienne pas : $\binom{3}{1}\cdot 0{,}9833^2 \cdot 0{,}0167$,	1 point	*Il peut avoir au plus 1 point sur ces 2 derniers si le coefficient binomial manque ou il est erroné.*
ce qui est à peu près 0,0484 (ou 4,84%)	1 point	
Total:	**4 points**	*S'il calcule avec $\frac{1}{60}$ et $\frac{59}{60}$, il trouve $\frac{3481}{72000}$ ≈0,0483.*

7. c)		
Si on envoie n SMS, la probabilité qu'ils parviennent tous est $0{,}9833^n$.	1 point	
Par conséquent la probabilité qu'au moins un SMS ne parvient pas est $1 - 0{,}9833^n$.	1 point	*2 points pour la constatation suivante : la probabilité que tout SMS parvienne à son destinataire est 2% au plus.*
On cherche le nombre naturel n le plus petit pour lequel: $1-0{,}9833^n \geq 0{,}98$.	1 point	
En rangeant : $0{,}02 \geq 0{,}9833^n$.	1 point	
D'ici : $\log_{0{,}9833} 0{,}02 \leq n$ (parce que les fonctions logarithme sont strictement décroissantes si leur base est inférieure à 1),	1 point	
$n \geq 232{,}3$.	1 point	*S'il calcule avec $\frac{1}{60}$ et $\frac{59}{60}$, il trouve $n \geq 232{,}8$ pour solution de l'inéquation.*
Alors si on envoie au moins 233 SMS, la probabilité qu'au moins un ne parvienne pas parmi ceux-ci, est d'au moins 0,98.	1 point	
Total:	**7 points**	*S'il résout une équation au lieu de l'inéquation, mais ne justifie pas que la valeur obtenue est la plus petite possible (p.ex. référence à la monotonie), alors il peut avoir 4 points au plus pour la résolution de la partie c).*

8. a)



Désignons par x le segment horizontal de la section transversale de la gouttière à bord arrondi, d'où la largeur l de la gouttière : $l = 2r + x$. Selon les conditions : $\frac{2r\pi}{2} + x = 20$	1 point	
et $\frac{r^2\pi}{2} + rx = 55$.	1 point	
De la première équation: $x = 20 - r\pi$ et en remplaçant ce dernier dans la deuxième équation : $\frac{r^2\pi}{2} + r(20 - r\pi) = 55$.	1 point	
$r^2\pi - 40r + 110 = 0$ $r_1 \approx 8{,}7$, d'ici $x_1 < 0$, ce qui n'est pas une bonne solution.	1 point	
$r_2 \approx 4{,}0$, d'où $r = 4{,}0$ cm.	1 point	
Donc $x = 20 - 4\pi = 7{,}434... \approx 7{,}4$. La largeur de la gouttière $l = 2r + x \approx 8{,}0 + 7{,}4 = 15{,}4$ cm.	1 point	
Total:	**6 points**	*1 point doit être enlevé seulement une seule fois si les résultats ne sont pas donnés au dixième près.*

8. b)		
Selon les conditions : $r\cdot\pi+x=20$, et $T=r\cdot x+\dfrac{r^2\cdot\pi}{2}$ sont maximaux. $(x=20-r\pi)$ On cherche le maximum de la fonction $T(r)=r\,(20-r\pi)+\dfrac{r^2\pi}{2}=-\dfrac{r^2\pi}{2}+20r$ ($0<r\le\dfrac{20}{\pi}$).	1 point	
$T(r)=-\dfrac{r^2\pi}{2}+20r$, par la méthode de carré parfait : $T(r)=-\dfrac{\pi}{2}\left(r-\dfrac{20}{\pi}\right)^2+\dfrac{200}{\pi}$	2 points*	
(Le premier terme de la somme n'est pas positif, son deuxième est constant, donc) la somme est maximale si le premier terme vaut zéro, alors $r-\dfrac{20}{\pi}=0$.	1 point*	
Le lieu du maximum: $r=\dfrac{20}{\pi}$.	1 point*	
D'ici, à cause de $x=20-r\pi=0$: la largeur de la section transversale de la gouttière à débit maximal est $l=2r+x=2r$, ce qu'il fallait démontrer.	1 point	
La section transversale de la gouttière à débit maximal est un demi-cercle dont le rayon est $r=\dfrac{20}{\pi}\approx 6{,}4$ (cm).	1 point	
Le but, c'est calculer le volume d'un demi-cylindre dont le rayon est $r=\dfrac{20}{\pi}\approx 6{,}4$ et la hauteur est $l=250$ cm. $V=\dfrac{\left(\dfrac{20}{\pi}\right)^2\pi\cdot 250}{2}$	1 point	*S'il calcule avec la valeur r = 6,4, il obtient la valeur* $V=\dfrac{6{,}4^2\cdot\pi\cdot 250}{2}\approx 16084{,}95\left(\text{cm}^3\right)$
$V\approx 15915{,}5\ \left(\text{cm}^3\right)$	1 point	*qui résulte également la*
≈ 16 litres.	1 point	*réponse juste de 16 litres.*
Total:	**10 points**	

*Nous présentons deux autres méthodes de résolution pour la partie de 4 points marquée par *.*

Méthode II		
Az $r \mapsto -\dfrac{r^2\pi}{2} + 20r$ $(r \in \mathbf{R}^+)$ est une fonction du second degré dont le coefficient principal ($-\dfrac{\pi}{2}$) est négatif donc la fonction a un maximum.	1 point	
Les deux racines de la fonction sont : $r_1 = 0$ et $r_2 = \dfrac{40}{\pi}$.	1 point	
Le lieu de maximum est la moyenne arithmétique des deux racines, donc $r = \dfrac{20}{\pi}$.	1 point	
Puisque $0 < r \le \dfrac{20}{\pi}$, il est également le lieu de maximum (absolu) de la fonction T étudiée.	1 point	

Méthode III		
La fonction dérivée de la fonction $r \mapsto -\dfrac{r^2\pi}{2} + 20r$ $(r \in \mathbf{R}^+)$: $r \mapsto -r\pi + 20$ $(r \in \mathbf{R}^+)$.	1 point	
Pour sa racine : $-r\pi + 20 = 0$, $r = \dfrac{20}{\pi}$ est un lieu d'extremum possible.	1 point	
Puisque la deuxième fonction dérivée: $r \mapsto -\pi$ y est négative, $r = \dfrac{20}{\pi}$ est un lieu de maximum.	1 point	
Puisque $0 < r \le \dfrac{20}{\pi}$, il est également le lieu de maximum (absolu) de la fonction T étudiée.	1 point	

9.		
Dans la première partie du championnat (aux cinq premiers matchs), la moyenne des points marqués par András soit notée par a. Il s'ensuit que, au cours des cinq premiers tours, le nombre total des points marqués est $5a$.	2 points	
En somme, András a marqué 23+14+11+20 = 68 points au cours du sixième, septième, huitième et neuvième match.	1 point	
Après le neuvième tour, la moyenne des points : $\frac{5a+68}{9}$.	1 point	
Selon la condition, cette moyenne est plus grande que celle des points marqués au cours des cinq premiers matchs,	1 point	
donc $\frac{5a+68}{9} > a$	1 point	
d'où $a < 17$.	2 points	
Le nombre des points marqués par András au dixième match soit noté par x. A la fin du championnat, la moyenne des points par match marqués par András: $\frac{5a+68+x}{10}$.	2 points	
Selon la condition : $\frac{5a+68+x}{10} \geq 18$,	1 point	
donc $5a+68+x \geq 180$,	1 point	
d'où $x \geq 112-5a$.	1 point	
Puisque $a < 17$, $x \geq 112-5a > 112-5\cdot 17 = 112-85 = 27$.	2 points	
Puisque $x > 27$, András a dû marquer au moins 28 points au dernier tour du championnat.	1 point	
Total:	**16 points**	