

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszerkesztésekért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

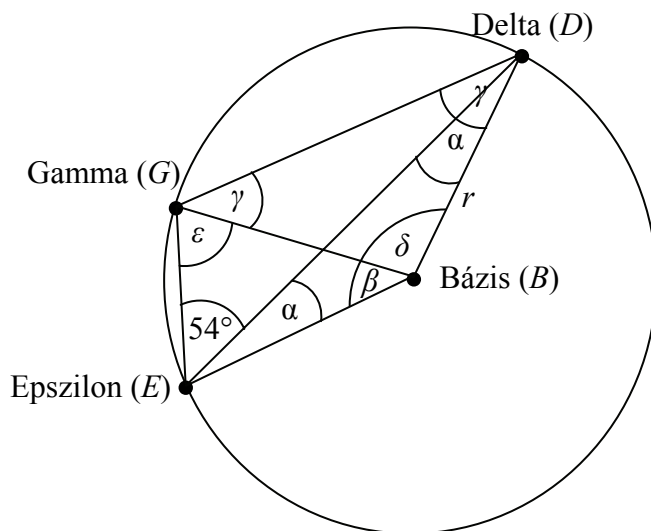
I.

1. a)		
Csak olyan x szám lehet megoldás, amelyre $0,5 < x$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha csak a helyes végeredményt veti össze az értelmezhetőséggel.</i>
Mivel $0 = \log_{\frac{1}{5}} 1$,	1 pont	
és az $\frac{1}{5}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő, ezért $2x - 1 > 1$,	1 pont	
azaz $x > 1$. (Ezek a valós számok eleget tesznek a kezdeti feltételnek is.)	1 pont	
Összesen:	4 pont	

1. b)		
$1 = 2^0$, és	1 pont	<i>Az egyenlőtlenség felírásáért indoklás nélkül is jár a két pont.</i>
mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő, ezért $ 2x - 1 - 2 > 0$,	1 pont	
azaz $ 2x - 1 > 2$. Ez az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $2x - 1 > 2$, vagy	1 pont	<i>Ez a 4 pont akkor is jár, ha grafikonról olvassa le a megoldást (2 pont), és ellenőrzi, hogy a leolvasott határok pontosak (2 pont).</i>
$2x - 1 < -2$.	1 pont	
Azaz $x > 1,5$, vagy	1 pont	
$x < -0,5$.	1 pont	
(A megoldáshalmaz: $] -\infty ; -0,5 [\cup] 1,5 ; +\infty [$)	1 pont	
Összesen:	6 pont	

2. a)		
Az 1 : 500 000 kicsinyítés azt jelenti, hogy a térképen 1 cm a valóságban 500 000 cm,	1 pont	
vagyis 5 km.	1 pont	
Így a bázis és a tornyok távolsága $3,5 \cdot 5 = 17,5$ km.	1 pont	
Összesen:	3 pont	<i>Helyes végeredmény közlése indoklás nélkül is 3 pont.</i>

2. b) első megoldás



A vázlat jelöléseivel: az EBD , a BEG és a BGD háromszögek egyenlő szárúak, mivel a B pont egyenlő távolságra van mindhárom másik ponttól.	1 pont	
$\beta + \delta = 142^\circ$, $\alpha = \frac{180^\circ - 142^\circ}{2} = 19^\circ$,	1 pont	
$\varepsilon = 54^\circ + 19^\circ = 73^\circ$,	1 pont	
$\beta = 180^\circ - 2 \cdot 73^\circ = 34^\circ$,	1 pont	
$\delta = 142^\circ - 34^\circ = 108^\circ$.	1 pont	
Például a koszinusz-tétel alapján:	1 pont	
$GD = \sqrt{17,5^2 + 17,5^2 - 2 \cdot 17,5^2 \cdot \cos 108^\circ} \approx 28,3$ (km),	1 pont	
$EG = \sqrt{17,5^2 + 17,5^2 - 2 \cdot 17,5^2 \cdot \cos 34^\circ} \approx 10,2$ (km),	1 pont	
$ED = \sqrt{17,5^2 + 17,5^2 - 2 \cdot 17,5^2 \cdot \cos 142^\circ} \approx 33,1$ (km).	1 pont	
A hétfői teljes úthossz: $BE + EG + GD + DB = 17,5 + 10,2 + 28,3 + 17,5 =$ $= 73,5 \approx 74$ km.	1 pont	
A csütörtöki teljes úthossz: $BG + GE + ED + DB = 17,5 + 10,2 + 33,1 + 17,5 =$ $= 78,3 \approx 78$ km.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

2. b) második megoldás		
Az EDG háromszög köré írt körének középpontja B , sugara $r = 17,5$ (km), mivel a B pont ekkora távolságra van mindhárom másik ponttól.	1 pont	
A GBD középponti szög 108° ,	1 pont	
mert kétszerese az 54° -os GED kerületi szögnek.	1 pont	
Az EBG középponti szög $142^\circ - 108^\circ = 34^\circ$.	1 pont	
A kerületi-középponti szögek összefüggése alapján $EDG\angle = 17^\circ$,	1 pont	
és $EGD\angle = 109^\circ$.	1 pont	
Az EDG háromszög oldalait az $a = 2r \sin \alpha$ összefüggés alapján számítva: $GD = 35 \cdot \sin 54^\circ \approx 28,32$ km,	1 pont	
$EG = 35 \cdot \sin 17^\circ \approx 10,23$ km,	1 pont	
$ED = 35 \cdot \sin 109^\circ \approx 33,09$ km.	1 pont	
A hétfői teljes úthossz: $BE + EG + GD + DB = 17,5 + 10,23 + 28,32 + 17,5 =$ $= 73,55 \approx 74$ km.	1 pont	
A csütörtöki teljes úthossz: $BG + GE + ED + DB \approx 17,5 + 10,23 + 33,09 + 17,5 =$ $= 78,32 \approx 78$ km.	1 pont	
Összesen:	11 pont	
<i>Ha az EGD háromszög oldalait egészre kerekítjük, akkor $DG=28$, $EG=10$; $ED=33$, a hétfői úthossz így 73 km, a csütörtöki 78 km. Ezt a számítást is fogadjuk el.</i>		

3. a)																														
A hármas számrendszerben az abb_3 háromjegyű számban a b számjegy háromféle, az a számjegy kétféle lehet, ezért 6 db abb_3 alakú szám van.	1 pont																													
Írjuk fel ezeket a hármas és a tízes számrendszerben is:	3 pont	<i>Legalább 8 db jó szám a 12-ből 1 pont, 11 db jó szám a 12-ből 2 pont.</i>																												
<table border="1"> <thead> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>abb_3</th> <th>tízesben</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>100</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>111</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>122</td> <td>17</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> <td>200</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>211</td> <td>22</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2</td> <td>222</td> <td>26</td> </tr> </tbody> </table>	a	b	abb_3	tízesben	1	0	100	9	1	1	111	13	1	2	122	17	2	0	200	18	2	1	211	22	2	2	222	26		
a	b	abb_3	tízesben																											
1	0	100	9																											
1	1	111	13																											
1	2	122	17																											
2	0	200	18																											
2	1	211	22																											
2	2	222	26																											
Három szám felel meg a feladat követelményeinek: a $200_3=18$, a $211_3=22$ és a $222_3=26$.	1 pont																													
Összesen:	5 pont																													

3. b) első megoldás		
Az ötelemű halmaznak $2^5 = 32$ darab részhalmaza van,	1 pont	
ezek között nulla elemű 1 darab,	1 pont	
egy elemű 5 darab van,	1 pont	
vagyis legalább kételemű részhalmazok száma: $32 - 6 = 26$.	1 pont	
Pontosan azokban a halmazokban nem osztható hárommal az elemek szorzata, amelyeknek elemei között csak a 2, 4 és az 5 számok szerepelnek.	1 pont	
Ilyen kételemű halmaz $\binom{3}{2} = 3$ darab,	1 pont	
ilyen háromelemű 1 darab van.	1 pont	
A megfelelő részhalmazok száma tehát $(26 - 4 =) 22$.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

3. b) második megoldás		
Összeszámoljuk, hány olyan legalább kételemű részhalmaza van a $\{2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaznak, amelyben az elemek szorzata osztható hárommal,	1 pont	
vagyis amelyben az elemek között van 3-mal osztható is (a 3 vagy a 6).	1 pont	
8 olyan részhalmaz van, amelynek eleme a 3, de nem eleme a 6, ($8 = 2^3$, a 3 mellé a 2, 4, 5 elemek közül választhatunk),	1 pont	
ezek között legalább kételemű 7 db, mert a $\{3\}$ egyelemű halmaz is ott van a 8 fenti részhalmaz között.	1 pont	
8 olyan részhalmaz van, amelynek eleme a 6, de nem eleme a 3 ($8 = 2^3$, a 6 mellé a 2, 4, 5 elemek közül választhatunk),	1 pont	
ezek között legalább kételemű 7 db, mert a $\{6\}$ egyelemű halmaz is ott van a 8 fenti részhalmaz között.	1 pont	
Azoknak a legalább kételemű részhalmazoknak a száma, amelyeknek eleme a 3, és eleme a 6 is, összesen szintén 8 ($= 2^3$, a 3 és a 6 mellé a 2, 4, 5 elemek közül választhatunk).	1 pont	
A megfelelő részhalmazok száma tehát $(7 + 7 + 8 =) 22$.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

3. b) harmadik megoldás		
A legalább kételemű részhalmaz elemeinek szorzata pontosan akkor osztható 3-mal, ha az elemei között van 3-mal osztható (tehát a 3 vagy a 6 legalább egyike az elemek között szerepel).	1 pont	
Kételemű részhalmaz $\binom{5}{2} = 10$ darab van,	1 pont	
ezek között $\binom{3}{2} = 3$ -ban nem szerepel sem a 3, sem a 6.	1 pont	
Háromelemű részhalmaz $\binom{5}{3} = 10$ darab van,	1 pont	
ezek között csak 1 olyan van (a $\{2; 4; 5\}$), amelyben nem szerepel sem a 3, sem a 6.	1 pont	
A legalább négyelemű részhalmazok mindegyikében szerepel a 3 és a 6 közül legalább az egyik, tehát ezek mindegyike megfelel.	1 pont	
A legalább négyelemű részhalmazok száma $\left(\binom{5}{4} + \binom{5}{5} \right) = 6$.	1 pont	
Az összes megfelelő részhalmazok száma tehát: $7+9+6=22$.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

Megjegyzések:

1. Az alábbi táblázatban felsoroljuk az összes legalább kételemű részhalmazt, és azokat, amelyek megfelelnek a feladat követelményeinek:

részhalmaz	összes	elemek szorzata osztható 3-mal
2 elemű	{2; 3}, {2; 4}, {2; 5}, {2; 6}, {3; 4}, {3; 5}, {3; 6}, {4; 5}, {4; 6}, {5; 6}.	{2; 3}, {2; 6}, {3; 4}, {3; 5}, {3; 6}, {4; 6}, {5; 6}.
3 elemű	{2; 3; 4}, {2; 3; 5}, {2; 3; 6}, {2; 4; 5}, {2; 4; 6}, {2; 5; 6}, {3; 4; 5}, {3; 4; 6}, {3; 5; 6}, {4; 5; 6}.	{2; 3; 4}, {2; 3; 5}, {2; 3; 6}, {2; 4; 6}, {2; 5; 6}, {3; 4; 5}, {3; 4; 6}, {3; 5; 6}, {4; 5; 6}.
4 elemű	{2; 3; 4; 5}, {2; 3; 4; 6}, {2; 3; 5; 6}, {2; 4; 5; 6}, {3; 4; 5; 6}.	{2; 3; 4; 5}, {2; 3; 4; 6}, {2; 3; 5; 6}, {2; 4; 5; 6}, {3; 4; 5; 6}.
5 elemű	{2; 3; 4; 5; 6}	{2; 3; 4; 5; 6}

2. Teljes értékű az a megoldás is, amelyben a vizsgázó az összesből azokat a részhalmazokat válogatja ki (sorolja fel), amelyek nem felelnek meg a feladat követelményeinek.

3. Ha a vizsgázó csak a megfelelő részhalmazokat sorolja fel, és nem tesz arra utalást, hogy miért teljes a felsorolása, megoldására legfeljebb 6 pontot kaphat.

4. Ha logikai szitát alkalmaz a vizsgázó, így pontozzuk:

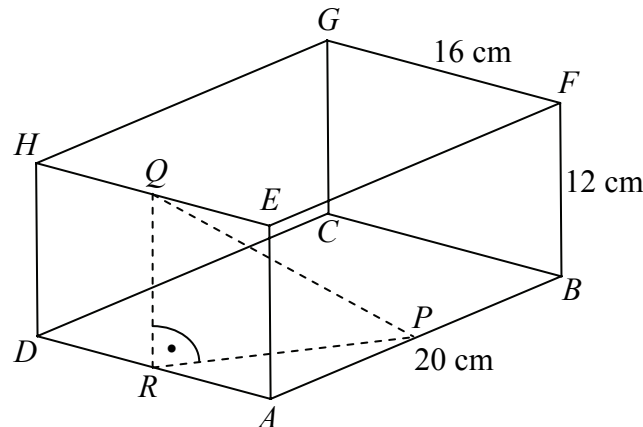
„benne van a 3” + „benne van a 6” – „benne van a 3 és a 6”

4 pont

$$(2^4 - 1) + (2^4 - 1) - 2^3 = 15 + 15 - 8 = 22$$

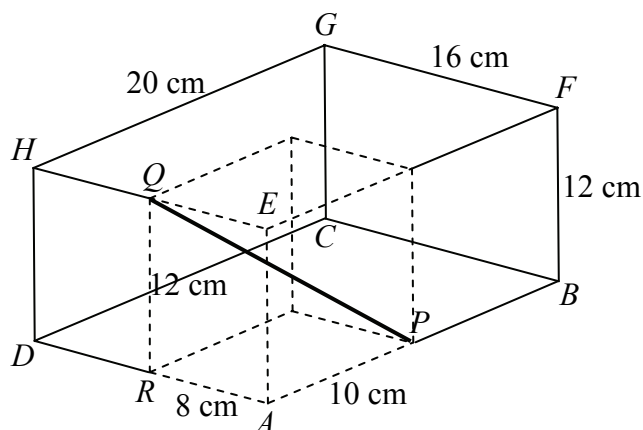
4 pont

4. a) első megoldás



Legyen az AD él felezőpontja R . Ekkor a PRQ háromszögnek R -nél derékszöge van.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.</i>
A PAR derékszögű háromszögből (Pitagorasz-tétellel): $PR^2 = 10^2 + 8^2 (= 164)$.	1 pont	
Mivel $QR=AE=12$ (cm), ezért a PRQ derékszögű háromszögből (Pitagorasz-tétellel):	1 pont	
$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = 12^2 + 10^2 + 8^2$. $PQ = \sqrt{308} (\approx 17,55)$ (cm).	1 pont	
Összesen:	4 pont	

4. a) második megoldás



PQ egy olyan téglatest egyik testátlója, amelynek egyik csúcsa az A , az A -ból kiinduló három élének hossza pedig 10 cm, 8 cm és 12 cm.

2 pont

A PQ testátló hossza tehát:

$$PQ = \sqrt{12^2 + 10^2 + 8^2} = \sqrt{304} (\approx 17,55) \text{ (cm)}.$$

2 pont

1 pont a testátlóra vonatkozó képlet helyes alkalmazásáért, 1 pont pedig a jó számolásért jár.

Összesen:

4 pont

4. b)

Különböző élpárokat kiválasztani annyiféleképpen lehet, ahányféleképpen 12 különböző elemből 2 elemet ki tudunk választani sorrendre való tekintet nélkül.

1 pont

Ez az 1 pont helyes megoldás esetén akkor is jár, ha a vizsgázó a magyarázatot nem írja le.

Ezért a különböző egyenespárok száma: $\binom{12}{2}$,

1 pont

ennek értéke pedig $\left(\frac{12 \cdot 11}{2} =\right) 66$.

1 pont

Összesen:

3 pont

4. c)		
Minden egyes élegyenest 4 további élegyenes metsz, ezért a metsző egyenespárok száma: $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$.	2 pont	<i>1 pont a helyes össze- számlálási módszer megtalálásáért jár akkor is, ha csak a megoldásá- ból derül ki a helyes gondolatmenet.</i>
Minden egyes élegyenessel 3 további élegyenes párhuzamos, ezért a párhuzamos egyenespárok száma: $\frac{12 \cdot 3}{2} = 18$.	1 pont	
Minden egyes élegyenessel 4 további élegyenes kitérő, ezért a kitérő egyenespárok száma: $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	
<i>A három eset közül kettőt kiszámítva és a b) feladat eredményét felhasználva megkapható a harmadik esethez tartozó szám. Ha a vizsgázó így jár el, de a b)-ben kapott hibás eredményével jól számolva adja meg a (hibás) válaszát úgy, hogy újabb hibát nem követ el, a c) részben adható teljes pontszámot megkapja.</i>		

4. d)		
Két kitérő élegyenes távolsága a mindkettőt merőlegesen metsző harmadik élegyenesre illeszkedő él (normál transzverzális) hossza.	1 pont	<i>Ez a pont jár akkor is, ha az ábrán jelölve vannak a távolságok, de szöveges indok nincs.</i>
Az AE élegyenes és az FG (vagy BC) élegyenes távolsága ($EF = AB =$) 20 cm.	1 pont	
Az AE élegyenes és a HG (vagy DC) élegyenes távolsága ($EH = AD =$) 16 cm.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

II.**5. a) első megoldás**

A mértani sorozat hányadosa egynél kisebb pozitív szám, ezért az összegekből képzett S_n sorozat konvergens,	1 pont	
határértéke: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{128}} = \frac{4096}{127} (\approx 32,25).$	2 pont	
(Mivel a mértani sorozat minden tagja pozitív, az S_n sorozat növekvő, így), $S_n < s = \frac{4096}{127} < 32,5$, tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

5. a) második megoldás

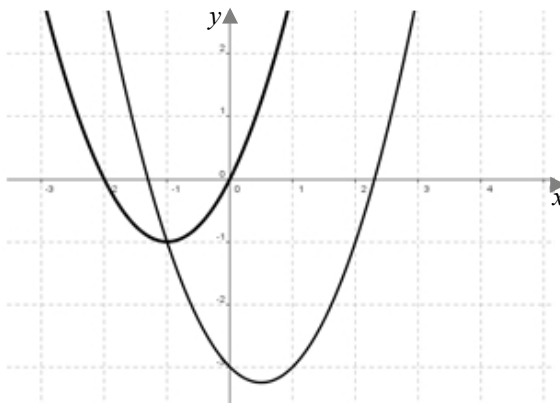
A mértani sorozat első n tagjának összege: $S_n = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{128^n} - 1 \right)}{\frac{1}{128} - 1},$ $S_n = \frac{2^{12}}{127} \cdot \left(1 - \frac{1}{128^n} \right).$	1 pont	
Az $\{S_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekedő, (mert az $\left\{ \frac{1}{128^n} \right\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő),	1 pont	
és minden n -re $S_n < \frac{2^{12}}{127}$.	1 pont	
$(S_n <) \frac{2^{12}}{127} = \frac{4096}{127} < 32,5$, tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

5. b)		
$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n =$ $= \frac{1}{128} \cdot \frac{32}{128} \cdot \frac{32^2}{128} \cdots \frac{32^{k-1}}{128} \cdots \frac{32^{n-1}}{128} =$	1 pont	
$= \frac{32^{1+2+3+\dots+n-1}}{128^n}$	1 pont	
A számláló kitevője az első $n-1$ pozitív egész összege, ami zárt alakban $\frac{n(n-1)}{2}$.	2 pont	
Mivel $32 = 2^5$ és $128 = 2^7$, ezért		
$\frac{32^{1+2+3+\dots+n-1}}{128^n} = \frac{2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}}}{2^{7n}}$	1 pont	
Mivel $2048 = 2^{11}$,		
megoldandó tehát a $\frac{2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}}}{2^{7n}} = (2^{11})^{3n}$ egyenlet.	1 pont	
Innen $2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}} = 2^{7n} \cdot 2^{33n} = 2^{40n}$,	1 pont	
ahonnan az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű volta (szigorú monotonitása) miatt az	1 pont	
$5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 40n$ következik.	1 pont	
(Az n értéke pozitív egész,) n -nel oszthatunk, ezért		
$\frac{5}{2}(n-1) = 40$.	1 pont	
Ennek pedig egyetlen gyöke az $n = 17$.	1 pont	
Az eredeti egyenlőség egyetlen megoldása tehát az $n = 17$.	1 pont	
Összesen:	12 pont	

6. a) első megoldás		
A két parabolának pontosan akkor van közös pontja az x tengelyen, ha az $x^2 + px + 1 = 0$ és $x^2 - x - p = 0$ másodfokú egyenleteknek van közös gyöke.	1 pont	
A közös gyök megoldása az $x^2 + px + 1 = x^2 - x - p$ egyenletnek.	2 pont	
Rendezés után: $x(p + 1) = -(p + 1)$.	1 pont	
Ha $p = -1$, akkor az egyenletnek minden x valós szám megoldása, tehát a két parabola azonos ($y = x^2 - x + 1$). Ez az eset tehát nem felel meg.	1 pont	
Ha $p \neq -1$,	1 pont	
akkor $x = -1$ lehet csak. Ekkor $p = 2$.	1 pont	
Így a két parabola egyenlete $y = x^2 + 2x + 1$, illetve $y = x^2 - x - 2$. (Közös pontjuk a $(-1; 0)$ pont.)	1 pont	
Összesen:	8 pont	

6. a) második megoldás		
A két parabolának pontosan akkor van közös pontja az x tengelyen, ha az $x^2 + px + 1 = 0$ és $x^2 - x - p = 0$ másodfokú egyenleteknek van közös gyöke.	1 pont	
Jelölje az $x^2 + px + 1 = 0$ egyenlet két (nem feltétlen különböző) gyökét x_1 és x_2 , az $x^2 - x - p = 0$ egyenlet gyökeit pedig x_1' és x_2' . Viète formulákat alkalmazva:	1 pont	
$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{array} \right\} \text{ illetve } \left. \begin{array}{l} x_1' + x_2' = 1 \\ x_1' \cdot x_2' = -p \end{array} \right\}$	1 pont	
(1.) A két egyenletnek ugyanazok a számok a megoldásai ($x_1 = x_1'$, és $x_2 = x_2'$). Ekkor $p = -1$ lehet csak. Viszont így a két egyenlet ugyanazt az $y = x^2 - x + 1$ egyenletű parabolát írja le, amit a feltétel kizár.	1 pont	
(2.) Ha nem egyenlő a két megoldáshalmaz, de van közös elemük, pl. $x_1 = x_1'$. A Viète-formulákból adódó egyenletek második egyenletei szerint $x_1 \cdot x_2 = 1$ és $x_1 \cdot x_2' = -p$. Ezekből $x_2' = -px_2$. A Viète-formulákból adódó egyenletek első egyenletei ezek szerint: $x_1 + x_2 = -p$ és $x_1 - px_2 = 1$. A két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből $x_2(p+1) = -(p+1)$ adódik.	1 pont	
Ha $p = -1$, akkor az (1.) eset valósul meg.	1 pont	
Ha $p \neq -1$, akkor $x_2 = -1$. Ekkor $p = 2$.	1 pont	
Így a két parabola egyenlete $y = x^2 + 2x + 1$, illetve $y = x^2 - x - 2$. (Közös pontjuk a $(-1; 0)$ pont.)	1 pont	
Összesen:	8 pont	

6. b)



Az $y = x^2 + 2x$ és az $y = x^2 - x - 3$ egyenletű parabolák vázlatos rajza. 2 pont *Jól ábrázolt parabolánként 1-1 pont.*

A parabolák közös pontjának első koordinátája -1 . 1 pont

Tekintsük az $f : [-1; 0] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x$, és $g : [-1; 0] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^2 - x - 3$ függvényeket. A kérdéses síkidom területe: $T = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx$. 1 pont

$T = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x - (x^2 - x - 3)) dx = \int_{-1}^0 (3x + 3) dx =$ 2 pont

$= \left[\frac{3x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^0 =$ 1 pont

$= 0 - \left(\frac{3}{2} - 3 \right) = \frac{3}{2}$ 1 pont

Összesen: 8 pont

Ha a vizsgázó külön integrálja a két függvényt, és azután végez kivonást, helyes számolás esetén jár az 5 pont.

7. a)

1. hamis 1 pont

2. hamis 1 pont

3. igaz 1 pont

4. igaz 1 pont

5. hamis 1 pont

Összesen: 5 pont

Egyértelműen megadott helyes válaszokért adható pont.

7. b)		
A statisztika szerint egy elküldött SMS $\frac{1}{60}$, azaz körülbelül 0,0167 valószínűséggel nem érkezik meg,	1 pont	<i>Ezt a 2 pontot akkor is megkapja a vizsgázó, ha ez a gondolat csak a megoldásából olvasható ki.</i>
és így $1-0,0167=0,9833$ valószínűséggel megérkezik a címzetthez.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy 3 darab SMS közül pontosan 1 nem érkezik meg: $\binom{3}{1} \cdot 0,9833^2 \cdot 0,0167,$	1 pont	<i>Ha a binomiális együttható hiányzik, vagy hibás, akkor az utolsó két pontból legfeljebb 1-et kaphat.</i>
ami közelítőleg 0,0484 (azaz 4,84%).	1 pont	
Összesen:	4 pont	<i>Ha $\frac{1}{60}$-dal és $\frac{59}{60}$-dal számol, akkor $\frac{3481}{72000} \approx \approx 0,0483$ adódik.</i>

7. c)		
Ha n darab SMS-t küldünk, akkor annak a valószínűsége, hogy ezek mindegyike megérkezik: $0,9833^n$.	1 pont	
Ezért $1 - 0,9833^n$ valószínűséggel legalább egy SMS nem érkezik meg.	1 pont	<i>2 pont jár a következő megállapításért: Lefeljebb 2 % annak a valószínűsége, hogy mindegyik SMS megérkezik a címzettjéhez.</i>
Azt a legkisebb n természetes számot keressük, amelyekre: $1 - 0,9833^n \geq 0,98$.	1 pont	
Rendezve: $0,02 \geq 0,9833^n$.	1 pont	
Ebből: $\log_{0,9833} 0,02 \leq n$ (mert az 1-nél kisebb alapú logaritmusfüggvények szigorúan monoton csökkenők),	1 pont	
$n \geq 232,3$.	1 pont	<i>Ha $\frac{1}{60}$-dal és $\frac{59}{60}$-dal számol, akkor $n \geq 232,8$-at kap az egyenlőtlenség megoldásaként.</i>
Tehát, ha legalább 233 SMS-t küldünk, akkor legalább 0,98 annak a valószínűsége, hogy ezek közül legalább 1 nem érkezik meg a címzettjéhez.	1 pont	
Összesen:	7 pont	<i>Ha egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja azt, hogy a legkisebb értéket kapta meg (pl. monotonitásra való hivatkozással), akkor a c) rész megoldására legfeljebb 4 pontot kaphat.</i>

8. a)		
<p>Jelöljük x-szel a lekerekített szélű csatorna-keresztmetszet vízszintes szakaszát, ekkor a csatorna l szélessége: $l = 2r + x$. A feltételek szerint:</p> $\frac{2r\pi}{2} + x = 20$	1 pont	
<p>és $\frac{r^2\pi}{2} + rx = 55$.</p>	1 pont	
<p>Az első egyenletből: $x = 20 - r\pi$, amit behelyettesítve a második egyenletbe:</p> $\frac{r^2\pi}{2} + r(20 - r\pi) = 55.$	1 pont	
$r^2\pi - 40r + 110 = 0$ $r_1 \approx 8,7$, ekkor $x_1 < 0$, így ez nem megoldás.	1 pont	
$r_2 \approx 4,0$, ahonnan $r = 4,0$ cm.	1 pont	
<p>Így $x = 20 - 4\pi = 7,434\dots \approx 7,4$. A csatorna szélessége $l = 2r + x \approx 8,0 + 7,4 = 15,4$ cm.</p>	1 pont	
Összesen:	6 pont	<p><i>Ha nem egy tizedesre kerekítve adja meg a válaszokat, csak egyszer vonjunk le 1 pontot.</i></p>

8. b)		
<p>A feltételek szerint:</p> $r \cdot \pi + x = 20, \text{ valamint } T = r \cdot x + \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \text{ maximális.}$ $(x = 20 - r\pi)$ <p>A $T(r) = r(20 - r\pi) + \frac{r^2 \pi}{2} = -\frac{r^2 \pi}{2} + 20r$</p> <p>$(0 < r \leq \frac{20}{\pi})$ függvény maximumát keressük.</p>	1 pont	
<p>$T(r) = -\frac{r^2 \pi}{2} + 20r$, teljes négyzetté kiegészítéssel:</p> $T(r) = -\frac{\pi}{2} \left(r - \frac{20}{\pi} \right)^2 + \frac{200}{\pi}$	2 pont*	
<p>(Az összeg első tagja nem pozitív, második tagja állandó, ezért) az összeg akkor maximális, ha az első tag nullával egyenlő, vagyis $r - \frac{20}{\pi} = 0$.</p>	1 pont*	
<p>A maximum helye: $r = \frac{20}{\pi}$.</p>	1 pont*	
<p>Innen $x = 20 - r\pi = 0$ miatt: a maximális áteresztőképességű csatorna keresztmetszetének szélessége $l = 2r + x = 2r$, amit bizonyítani kellett.</p>	1 pont	
<p>A maximális áteresztőképességű csatorna keresztmetszete egy olyan félkör, amelynek a sugara $r = \frac{20}{\pi} \approx 6,4$ (cm).</p>	1 pont	
<p>A feladat egy $r = \frac{20}{\pi} \approx 6,4$ cm sugarú, $l = 250$ cm magasságú félhenger térfogatának kiszámítása.</p> $V = \frac{\left(\frac{20}{\pi}\right)^2 \pi \cdot 250}{2}$	1 pont	<p><i>Ha $r=6,4$ értékkel számol:</i></p> $V = \frac{6,4^2 \cdot \pi \cdot 250}{2} \approx 16084,95$ <p><i>(cm³) értéket kap, amelyből szintén következik a 16 liter helyes válasz.</i></p>
<p>$V \approx 15915,5$ (cm³)</p>	1 pont	
<p>≈ 16 liter</p>	1 pont	
Összesen:	10 pont	

*A *-gal jelölt 4 pontos részre adunk még két megoldási módszert:*

II. módszer		
Az $r \mapsto -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$ ($r \in \mathbf{R}^+$) egy olyan másodfokú függvény, amelyben a főegyüttható ($-\frac{\pi}{2}$) negatív, vagyis a függvény maximummal rendelkezik.	1 pont	
A függvény két zérushelye: $r_1 = 0$ és $r_2 = \frac{40}{\pi}$.	1 pont	
A maximumhely a két zérushely számtani közepe, vagyis $r = \frac{20}{\pi}$.	1 pont	
Ez $0 < r \leq \frac{20}{\pi}$ miatt a vizsgált T függvénynek is (abszolút) maximumhelye.	1 pont	

III. módszer		
Az $r \mapsto -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$ ($r \in \mathbf{R}^+$) függvény deriváltfüggvénye: $r \mapsto -r\pi + 20$ ($r \in \mathbf{R}^+$).	1 pont	
Ennek zérushelyére: $-r\pi + 20 = 0$, ekkor $r = \frac{20}{\pi}$ lehetséges szélsőérték hely.	1 pont	
Mivel a második deriváltfüggvény: $r \mapsto -\pi$ ezen a helyen negatív, így $r = \frac{20}{\pi}$ maximumhely.	1 pont	
Ez $0 < r \leq \frac{20}{\pi}$ miatt a vizsgált T függvénynek is (abszolút) maximumhelye.	1 pont	

9.		
A bajnokság első felében, (az első öt mérkőzésen) az András által dobott pontok átlaga legyen a . Az első öt fordulóban összesen dobott pontok száma így: $5a$.	2 pont	
A hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik mérkőzésen András összesen $23 + 14 + 11 + 20 = 68$ pontot dobott.	1 pont	
A kilencedik forduló utáni pontátlag: $\frac{5a + 68}{9}$.	1 pont	
A feltétel alapján ez az átlag nagyobb, mint az első öt mérkőzésen dobott átlag,	1 pont	
azaz $\frac{5a + 68}{9} > a$	1 pont	
ahonnan $a < 17$.	2 pont	
A tizedik mérkőzésen András által dobott pontok száma legyen x . A bajnokság végén András mérkőzésenkénti pontátlaga: $\frac{5a + 68 + x}{10}$.	2 pont	
A feltétel alapján: $\frac{5a + 68 + x}{10} \geq 18$,	1 pont	
azaz $5a + 68 + x \geq 180$,	1 pont	
ahonnan $x \geq 112 - 5a$.	1 pont	
Mivel $a < 17$, ezért $x \geq 112 - 5a > 112 - 5 \cdot 17 = 112 - 85 = 27$.	2 pont	
Mivel $x > 27$, ezért Andrásnak legalább 28 pontot kellett dobnia az utolsó fordulóban.	1 pont	
Összesen:	16 pont	