ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. május 7.

MATEMATIKA HORVÁT NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Važne informacije

Formalni propisi:

1. Radnju treba ispraviti kemijskom olovkom čija **se boja razlikuje** od one kakvom je pisao pristupnik, pogreške, nedostatke itd. treba obilježavati sukladno školskoj praksi.
2. U prvom od dvaju sivih pravokutnika koji se nalaze pored zadatka upisan je maksimalni broj bodova za dani zadatak, **a broj bodova** koje daje profesor koji ispravlja radnje upisuje se u **pravokutnik** pored njega.
3. U slučaju **besprijekornog rješenja** dovoljno je upisati maksimalni broj bodova u odgovarajuće pravokutnike.
4. U slučaju manjkavih/netočnih rješenja vas molimo da i **parcijalne bodove** zapišete na radnju.
5. One dijelove rješenja koji su pisani grafitnom olovkom – osim crteža – profesor koji ispravlja radnje ne može vrednovati.

Pitanja u svezi sa sadržajem:

1. Kod pojedinih smo zadataka dali i bodovanje više rješenja. Ukoliko ste dobili rješenje koje **odstupa od danih**, potražite one dijelove rješenja koji su ekvivalentni rješenjima Upute i na osnovi toga bodujte.
2. Bodovi Upute **se mogu dalje dijeliti**. Međutim, bodovi koji se daju mogu biti samo cijeli.
3. Za evidentno pravilan postupak i konačan rezultat se, naravno, može dati maksimalni broj bodova i onda kada je ono **manje detaljno** od onoga u Uputi.
4. Ako rješenje sadrži **netočnost, pogrešku u računanju**, učenik ostaje bez bodova samo za onaj dio zadatka gdje je učinio pogrešku. Ako s pogrešnim parcijalnim rješenjem, ali pravilnim postupkom učenik radi dalje onda mu se moraju dati sljedeći parcijalni bodovi.
5. U slučaju **pogreške u načelu**, u okviru jedne misaone cjeline (one su u Uputi označene dvostrukom crtom) se ne dodjeljuju bodovi niti za formalno pravilne matematičke korake. Međutim, ako učenik s pogrešnim rezultatom koji je dobio primjenom pogrešnog načela kao polaznim podatkom pravilno računa u sljedećoj misaonoj cjelini ili dijelu pitanja, onda za taj dio mora dobiti maksimalni broj bodova ako se problem koji se mora riješiti nije bitno promijenio.
6. Ako su u Uputi za ispravljane i vrednovanje **primjedbe** ili **jedinice za mjerenje** navedene u zagradama onda je i bez njih rješenje potpuno.
7. Od više pravilnih pokušaja rješenja zadatka može se **vrednovati onaj koje je pristupnik označio.**
8. Za rješenja zadataka se **ne mogu dati nagradni bodovi** (više od maksimalnog broja bodova za rješenje zadatka ili dijela zadatka).
9. **Ne oduzimaju se bodovi** za one pogrešne parcijalne izračune i korake koje pristupnik nije koristio pri rješavanju zadatka.
10. **Od 3 naznačena zadatka niza zadataka II. B dijela mogu se vrednovati samo rješenja 2 zadatka.** Kandidat je, pretpostavljamo, u polje kvadrata namijenjenog u tu svrhu upisao redni broj zadatka čija se ocjena neće pribrojiti sveukupnom broju bodova. Sukladno tome se eventualno rješenje naznačenog zadatka ne mora ispraviti. Ako ipak nije nedvosmisleno jasno za koji zadatak učenik traži da ne bude vrednovan, onda je automatski posljednji u nizu navedenih zadataka onaj koji ne treba vrednovati.

I.

1.		
Razlomak dobijen nakon skraćivanja: $\frac{a-2b}{3}$.	2 boda	*2 boda se ne mogu dijeliti.*
Ukupno:	**2 boda**	

2.		
Nastaje rotacijski valjak, polumjer/radijus osnovne kružnice je 5 cm, visina 12 cm.	1 bod	*Ako su te misli/ideje označene na prikazu, daje se 1 bod.*
$V = 25\pi \cdot 12$ (cm^3).	1 bod	
Zapremina/volumen rotacijskog valjka je 300π cm^3.	1 bod	*Odgovor dan i u decimalnom obliku je punovrijedan.*
Ukupno:	**3 boda**	

3.		
Broj realnih korijena: 1.	2 boda	*Ako je odgovor x=5 to vrijedi 1 bod. Ako je odgovor 5, to je 0 bodova.*
Ukupno:	**2 boda**	

4.		
$x_1 = 14$, $x_2 = -14$	2 boda	*Po 1 bod za pravilne odgovore.*
Ukupno:	**2 boda**	

5.		
Mjesni vektor polovišta: $\vec{f} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.	1 bod	
Uređivanjem toga: $\vec{b} = 2\vec{f} - \vec{a}$.	1 bod	
Ukupno:	**2 boda**	

6.		
Najmanji traženi pozitivni kut 30º.	2 boda	*1 bod se daje za zapisivanje $750^o = 2 \cdot 360^o + 30^o$.*
Ukupno:	**2 boda**	

7.		
$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	1 bod	
Kvadrat jednog broja je najmanji kada kvadriramo 0. Funkcija kod $x = -9$ prima najmanju vrijednost.	1 bod	
Ukupno:	**2 boda**	

8.		
Ima $2^4=16$ peteroznamenkastih pozitivnih brojeva.	2 boda	
Ukupno:	**2 boda**	

9.		
I. grupa 180 osoba, II. grupa 240 osoba, III. grupa 300 osoba.	1-1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

10.		
Jednadžbu uređujemo na oblik $2x-7y=0$	1 bod	
Jedan normirani vektor pravca *e* koji je okomit na to **n** (7 ; 2),	1 bod	
tako je jednadžba pravca *e* $7x + 2y = 33$.	1 bod	*Pravilno korištenje bilo kojeg oblika jednadžbe pravca je punovrijedna.*
Ukupno:	**3 boda**	

11.		
A: istinita; B: lažna; C: istinita; D: istinita.	1-1 bod	
Ukupno:	**4 boda**	

12.		
Napišemo članove niza $a_1=-1,\quad a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_4=1,\quad a_5=1,\quad a_6=2$.	2 boda	
Tako $S_6=4$.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

II. A

13. a)		
Stranica kvadrata je a, stranice pravokutnika su a, odnosno $\frac{a}{3}$.	1 bod	*I onda se daje ovaj bod ako oznaka postaje jasna samo iz prikaza.*
Opseg jednog pravokutnika $2a+\frac{2a}{3}=24$,	2 boda	
iz čega $a=9$ cm.	1 bod	
Površina kvadrata 81 cm^2.	1 bod	
Ukupno:	**5 bodova**	

13. b) prvo rješenje		
Prema Pitagorinom poučku $13^2-12^2=x^2$ (ili Pitagorina trojka brojeva 13, 12, 5),	1 bod	
kateta (BP) pravokutnog trokuta je 5 cm.	1 bod	
Površina trokuta se može napisati na dva načina: $T=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}$,	2 boda	
iz čega $a\cdot b=c\cdot m_c$,	1 bod	
to jest $m_c=\frac{a\cdot b}{c}=\frac{60}{13}$.	1 bod	
Visina koja pripada hipotenuzi iznosi 4,6 cm.	1 bod	
Ukupno:	**7 bodova**	

13. b) drugo rješenje		
Prema Pitagorinom poučku $13^2-12^2=x^2$ (ili Pitagorina trojka brojeva 13, 12, 5),	1 bod	
kateta (BP) pravokutnog trokuta je 5 cm.	1 bod	
Prema poučku o kateti $5=\sqrt{13\cdot p}$,	2 boda	
$p=\frac{25}{13}\approx 1{,}92$.	1 bod	
Pitagorinim poučkom $m_c{}^2=5^2-\left(\frac{25}{13}\right)^2$	1 bod	
Visina koja pripada hipotenuzi iznosi 4,6 cm.	1 bod	
Ukupno:	**7 bodova**	

13. b) **treće rješenje**		
U pravokutnom trokutu *ABP* kut kod vrha *A* označimo s α, a nožište visine koja pripada hipotenuzi *AP* označimo s *Q*. U pravokutnom trokutu *ABP* $\cos\alpha = \frac{AB}{AP} = \frac{12}{13}$.	2 boda	
$\alpha \approx 22{,}62°$.	1 bod	*Ovaj se bod daje i onda ako vrijednost sin α kasnije pravilno izračuna.*
U pravokutnom trokutu *AQB* $\sin\alpha = \frac{BQ}{AB} = \frac{BQ}{12}$.	2 boda	
$BQ = 12 \cdot \sin\alpha \approx 12 \cdot 0{,}3846 \approx 4{,}6152$.	1 bod	
Visina koja pripada hipotenuzi iznosi 4,6 cm.	1 bod	
Ukupno:	**7 bodova**	

14. a)		
Područje definicije: $\left(\text{zbog } 2x - 5 > 0 \text{ i } x > 0\right)$ $x > \frac{5}{2}$.	1 bod	*Ako radi s jednadžbom posljedice i dobiveni korijen provjerava uvrštavanjem, daje se taj bod.*
(Koristeći jednakosti logaritma) $2x - 5 = \frac{x}{3}$.	2 boda	
Nakon uređivanja jednadžbe $x = 3$.	1 bod	
Dobiveni korijen je element područja definicije, dakle to je rješenje.	1 bod	
Ukupno:	**5 bodova**	

14. b)

$0 \le 13-2x$, tako $x \le 6{,}5$.	1 bod	*Ako radi s jednadžbom posljedice i dobivene korijene provjerava uvrštavanjem, neistinit korijen isključi, daju se i ti bodovi.*
$0 \le \sqrt{13-2x} = x-5$, iz čega $5 \le x$. Dakle, jednadžba samo u slučaju $5 \le x \le 6{,}5$ može imati rješenje.	1 bod	
Kvadriranje obje strane: kvadrat lijeve strane $13-2x$.	1 bod	
Kvadrat desne strane $x^2-10x+25$.	1 bod	
Kvadratna jednadžba koja se mora riješiti: $0 = x^2-8x+12$.	1 bod	
Iz toga $x=6$ ili $x=2$.	1 bod	
Jedino realno rješenje jednadžbe na osnovnom skupu je 6.	1 bod	
Ukupno:	**7 bodova**	

15. a)

Obje stručne spreme ima 20 osoba,	1 bod	
jer broj diploma koje dokazuju spremu je 42+28=70, što je za 20 više od broja (zaposlenika) koji su stekli diplomu.	1 bod	*Ovaj se bod daje i za izradu odgovarajućeg prikaza skupa.*
Tako samo stručnu spremu tehničara imaju 22 osobe.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

15. b)

Ako je broj zaposlenika mlađih od 30 godina x,	1 bod	*Taj se bod daje i onda ako ova misao/ideja postaje jasna samo tijekom rješenja.*
onda je prosjek $\dfrac{x\cdot 148000+(50-x)\cdot 173000}{50}=165\,000.$	1 bod	
$x=16$	1 bod	
U laboratoriju je 16 zaposlenika mlađe od 30 godina.	1 bod	
Ukupno:	**4 boda**	

15. c)		
Plaćaju troškove 5 zaposlenika.	1 bod	
Svi slučajevi: $\binom{25}{5}$,	1 bod	
broj povoljnih slučajeva: $\binom{17}{5}$.	1 bod	
(Koristeći model klasične vjerojatnosti:) $\frac{\binom{17}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{6188}{53130} \approx 0{,}1165.$	1 bod	
0,12 (odnosno 11,65%) je vjerojatnosti da će izabrati 5 žena.	1 bod	
Ukupno:	**5 bodova**	

II. B

16. a)		
Na dužinu *c* treće stranice trokuta (zbog nejednakosti trokuta) $20 + c > 22$	1 bod	
i $c < 20 + 22$ se ispunjavaju.	1 bod	
Tako $2 < c < 42$.	1 bod	
Ako je i treća stranica cijela, najmanja vrijednost *c* je 3, a njena najveća vrijednost može biti 41.	1 bod	
To znači 39 odgovarajućih trokuta.	1 bod	
Ukupno:	**5 bodova**	

16. b)		
(Označavajući kut koji zatvaraju dvije stanice s γ) $88 = \frac{20 \cdot 22 \cdot \sin\gamma}{2}$.	1 bod	
Iz toga $\sin\gamma = 0{,}4$.	1 bod	
$\gamma_1 \approx 23{,}6^\circ$	1 bod	
$\gamma_2 \approx 156{,}4^\circ$	1 bod	
Ukupno:	**4 boda**	

16. c)		
U slučaju $\gamma_1 \approx 23{,}6^\circ$ dužinu treće stranice (c_1) možemo izračunati primjenjujući kosinusni poučak.	1 bod	*Taj se bod daje i onda ako ova misao/ideja postaje jasna samo tijekom rješenja.*
$c_1^2 \approx 20^2 + 22^2 - 2 \cdot 20 \cdot 22 \cdot \cos 23{,}6^\circ$	1 bod	
$c_1^2 \approx 77{,}568$,	1 bod	
i iz toga je $c_1 \approx 8{,}8$ jedinica	1 bod	
U slučaju $\gamma_2 \approx 156{,}4^\circ$ dužinu treće stranice (c_2): $c_2^2 \approx 20^2 + 22^2 - 2 \cdot 20 \cdot 22 \cdot \cos 156{,}4^\circ$.	1 bod	
$c_2^2 \approx 884 - 880 \cdot (-0{,}9164)$, to jest $c_2^2 \approx 1690{,}4$ iz toga	1 bod	
$c_2 \approx 41{,}1$ jedinica.	1 bod	
Dužina treće stranice trokuta može biti $\approx 8{,}8$ jedinica ili $\approx 41{,}1$ jedinica.	1 bod	
Ukupno:	**8 bodova**	*Ako računa samo s jednim slučajem, za ovaj dio može dobiti najviše 4 boda.*

17. a)		
Gáborova najamnina se povećava po geometrijskom nizu $a_1 = 100$ i $a_{24} = 200$.	1 bod	
$100 \cdot q^{23} = 200$, $q^{23} = 2$ (gdje $q = 1 + \frac{p}{100}$)	1 bod	
$q = \sqrt[23]{2} = 2^{\frac{1}{23}}$ $(\approx 1{,}0306)$	1 bod	
$p = 3{,}06$,	1 bod	
to jest, Gábor svaki mjesec mora platiti za 3,06% višu najamninu.	1 bod	
Ukupno:	**5 bodova**	

17. b)		
Péterova najamnina se povećava po aritmetičkom nizu $b_1 = 100$ i $b_{24} = 200$,	1 bod	
$200 = 100 + 23 \cdot d$	1 bod	
$d = \frac{100}{23} \approx 4{,}35$, mjesečno povećanje/rast je 4,35 talira.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

17. c)		
Zbroj prva 24 člana niza:	1 bod	*Taj se bod daje i onda ako ova misao/ideja postaje jasna samo tijekom rješenja.*
$S_{Gábor} = 100 \cdot \frac{\left(\sqrt[23]{2}\right)^{24} - 1}{\sqrt[23]{2} - 1} \approx 3468{,}45$.	2 boda	
$S_{Péter} = \frac{100 + 200}{2} \cdot 24 = 3600$.	2 boda	
Péter tijekom 24 mjeseca plaća za 132 talira više najamnine od Gábora.	1 bod	
Ukupno:	**6 bodova**	

Predočivši grafikonom najamnine je uočljivo da bi Péter svaki mjesec plaćao više najamnine od Gábora (osim za 1. i 24. mjesec).
Stoga je evidentno da bi Péter tijekom 24 mjeseca platio više najamnine od Gábora.
Za pravilnu zamisao koja je zasnovana na jasno postavljenom grafikonu mogu se dati 3 boda.

17. d)		
Péter u prvih 12 mjeseci plaća $S_{12}=\dfrac{2\cdot 100+11\cdot\dfrac{100}{23}}{2}\cdot 12\approx 1487$ talira najamnine,	1 bod	
za drugih 12 mjeseci plaća 2113 talira.	1 bod	
$\dfrac{2113}{1487}\approx 1{,}421$, dakle, Péter za drugu godinu plaća 42,1% više najamnine nego što je plaćao prve godine.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

18. a) prvo rješenje		
Ako zanemarimo da proizvodi ne mogu biti smješteni jedan pored drugog, onda se šest vrsta proizvoda može rasporediti na 6! načina.	1 bod	
Ako dvije vrste proizvoda rasporede jedan pored drugog, ali ne razlikujemo njihov redoslijed, moguće je ostvariti 5! načina rasporeda.	1 bod	
Ako razlikujemo redoslijed tih dvaju proizvoda onda se šest vrsta proizvoda može smjestiti na 2 · 5! načina.	1 bod	
Odgovarajući broj načina rasporeda dobit ćemo ako od ukupnog broja svih slučajeva oduzmemo broj rasporeda onih slučajeva kada su mrvice i pšenična prekrupa smještene jedna pored druge: $6!-2\cdot 5!$.	2 boda	*I za manje detaljniji slijed razmišljanja se daje 2 boda.*
Dakle, prodavač šest vrsta roba može rasporediti na 480 načina.	1 bod	
Ukupno:	**6 bodova**	*Ako ne uzme u obzir da dva proizvoda ne mogu biti smještena jedan pored drugog, može se dati najviše 1 bod.*

18. a) drugo rješenje		
Samo pšenična prekrupa i mrvice bi na $6\cdot 5$, to jest 30 načina mogle biti raspoređene kada bi mogle biti smještene jedna pored druge.	1 bod	
U 5 slučajeva ta dva proizvoda mogu biti smještena jedan pored drugog ako ne uzmemo u obzir njihov redoslijed,	1 bod	
ali budući da se i redoslijed računa, stoga u 10 slučajeva.	1 bod	
Tako, dva proizvoda može rasporediti na $(30-10=)$ 20 načina tako da oni ne budu smješteni jedan pored drugog.	1 bod	
U svih 20 slučajeva ostala četiri proizvoda može rasporediti na 4! načina.	1 bod	
Dakle, šest vrsta proizvoda može rasporediti na $20\cdot 4!=480$ načina	1 bod	
Ukupno:	**6 bodova**	

18. b)		
Ukupno je naručeno 325 (=176+109+40) kom. kruha, od čega su vraćena 42 kom.,	1 bod	
što je 12,9% naručene količine.	1 bod	
Ukupno je naručeno 695 (=314+381) kom. peciva, od čega je vraćeno 34 kom.,	1 bod	
što je 4,9% naručene količine.	1 bod	
Ukupno:	**4 boda**	

18. c)		
Broj prodanog peciva pojedinih dana: 124; 133; 132; 122; 150 kom.	1 bod	
Dva dana možemo označiti na $\binom{5}{2}$ načina.	1 bod	
(Tijekom 3 dana je prodano najmanje 130 kom.) Tražena 2 dana mogu biti izabrana na $\binom{3}{2}$ načina,	1 bod	
tako je tražena vjerojatnost $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = 0{,}3$	1 bod	
Ukupno:	**4 boda**	

18. d)		
Od kruha od 1 kg naručeno je $(\frac{155}{5} =)$ 31 kom., od kruha od ½ kg $(\frac{95}{5} =)$ 19 kom., od raženog kruha $(\frac{33}{5} = 6{,}6)$ 7 kom.,	2 boda	*Za dva pravilna odgovora daje se 1 bod, za jedan pravilan odgovor se ne daju bodovi.*
od žemlji 58 kom., od kifli 68 kom.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	