ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2013. május 7.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivelegyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
Az egyszerűsítés után kapott tört: $\frac{a-2b}{3}$.	2 pont	*A 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
Forgáshenger keletkezik, az alapkör sugara 5cm, magassága 12cm.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok ábrán jelölve szerepelnek, jár az 1 pont.*
$V = 25\pi \cdot 12\,(\text{cm}^3)$.	1 pont	
A forgáshenger térfogata $300\pi\,\text{cm}^3$.	1 pont	*Tizedes tört alakban megadott válasz is teljes értékű.*
Összesen:	**3 pont**	

3.		
A valós gyökök száma: 1.	2 pont	*Ha x=5 a válasz, az1 pontot ér. Ha 5 a válasz, az 0 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$x_1 = 14,\ x_2 = -14$	2 pont	*Helyes válaszonként 1-1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
A felezőpont helyvektora: $\vec{f} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.	1 pont	
Ezt rendezve: $\vec{b} = 2\vec{f} - \vec{a}$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
A keresett legkisebb pozitív szög 30º.	2 pont	*$750^o = 2\cdot 360^o + 30^o$ felírásáért 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	1 pont	
Egyszám négyzete akkor a legkisebb, ha 0-t emelünk négyzetre. A függvény $x = -9$ -nél veszi fel a legkisebb értékét.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
$2^4=16$ ötjegyű pozitív szám van.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
I.csoport 180 személy, II. csoport 240 személy, III. csoport300 személy.	1-1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
Az egyenletet $2x-7y=0$ alakra rendezzük.	1 pont	
Az erre merőleges *e* egyenes egy normálvektora **n**(7; 2),	1 pont	
így *e* egyenes egyenlete $7x+2y=33$.	1 pont	*Az egyenesek egyenletének bármely alakban való helyes használata teljes értékű.*
Összesen:	**3 pont**	

11.		
A: igaz; B: hamis; C: igaz; D: igaz.	1-1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
Felírjuk a sorozat tagjait: $a_1=-1,\quad a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_4=1,\quad a_5=1,\quad a_6=2$.	2 pont	
Így $S_6=4$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

13. a)		
A négyzet oldala a, a téglalapok oldalai a, illetve $\frac{a}{3}$.	1 pont	*Ha a jelölés csak az ábrából derül ki, akkor is jár ez a pont.*
Egy téglalap kerülete $2a+\frac{2a}{3}=24$,	2 pont	
amiből $a=9$ cm.	1 pont	
A négyzet területe 81 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b) **első megoldás**		
Pitagorasz tétel szerint $13^2-12^2=x^2$ (vagy a 13,12, 5 Pitagoraszi számhármas),	1 pont	
a derékszögű háromszög befogója (BP) 5 cm.	1 pont	
A háromszög területe felírható kétféleképpen: $T=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}$,	2 pont	
melyből $a\cdot b=c\cdot m_c$,	1 pont	
vagyis az $m_c=\frac{a\cdot b}{c}=\frac{60}{13}$.	1 pont	
Az átfogóhoz tartozó magasság 4,6 cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

13.b) **második megoldás**		
Pitagorasz tétel szerint $13^2-12^2=x^2$ (vagy a 13, 12, 5 Pitagorasz-féle számhármas),	1 pont	
a derékszögű háromszög befogója (BP) 5 cm.	1 pont	
A befogótétel szerint $5=\sqrt{13\cdot p}$,	2 pont	
$p=\frac{25}{13}\approx 1{,}92$.	1 pont	
Pitagorasz tétellel $m_c{}^2=5^2-\left(\frac{25}{13}\right)^2$	1 pont	
Az átfogóhoz tartozó magasság 4,6 cm.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

13. b) **harmadik megoldás**		
Az ABP derékszögű háromszögben jelöljük az A csúcsnál lévő szöget α -val és az AP átfogóhoz tartozó magasság talppontját Q-val. Az ABP derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \frac{AB}{AP} = \frac{12}{13}$.	2 pont	
$\alpha \approx 22{,}62°$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a későbbiekben* $\sin\alpha$ *értékét helyesen számítja ki.*
Az AQB derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \frac{BQ}{AB} = \frac{BQ}{12}$.	2 pont	
$BQ = 12 \cdot \sin\alpha \approx 12 \cdot 0{,}3846 \approx 4{,}6152$.	1 pont	
Az átfogóhoz tartozó magasság 4,6 cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

14. a)		
Értelmezési tartomány: $(2x - 5 > 0 \text{ és } x > 0 \text{ miatt})\ x > \frac{5}{2}$.	1 pont	*Ha következmény-egyenlettel dolgozik és a kapott gyököt behelyettesítéssel ellenőrzi, ez a pont jár.*
(A logaritmus azonosságait felhasználva) $2x - 5 = \frac{x}{3}$.	2 pont	
Az egyenlet rendezése után $x = 3$.	1 pont	
A kapott gyök eleme az értelmezési tartománynak, tehát megoldás.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14.b)		
$0 \le 13 - 2x$, így $x \le 6{,}5$.	1 pont	*Ha következmény-egyenlettel dolgozik és a kapott gyököket behelyettesítéssel ellenőrzi, a hamis gyököt kizárja, ezek a pontok járnak.*
$0 \le \sqrt{13-2x} = x-5$, ebből $5 \le x$. Tehát az egyenletnek csak $5 \le x \le 6{,}5$ esetén lehet megoldása.	1 pont	
Mindkét oldalt négyzetre emelve: a baloldal négyzete $13 - 2x$.	1 pont	
A jobboldal négyzete: $x^2 - 10x + 25$.	1 pont	
A megoldandó másodfokú egyenlet: $0 = x^2 - 8x + 12$.	1 pont	
Ebből $x = 6$ vagy $x = 2$.	1 pont	
Az egyenlet egyetlen valós megoldása az alaphalmazon a 6.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. a)		
Mindkét végzettséggel rendelkezik 20 fő,	1 pont	
mert a végzettséget jelentő oklevelek száma 42+28=70, ami 20-szal több az oklevelet szerzők (dolgozók) létszámánál.	1 pont	*Ezt a pont jár megfelelő halmazábra készítéséért is.*
Így csak technikusi végzettsége 22 főnek van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15.b)		
Ha a 30 év alatti dolgozók száma x,	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
akkor az átlag: $\frac{x \cdot 148000 + (50-x) \cdot 173000}{50} = 165\,000$.	1 pont	
$x = 16$	1 pont	
A laborban 16 dolgozó 30 év alatti.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15.c)		
5 dolgozó költségeit fizetik.	1 pont	
Az összes eset: $\binom{25}{5}$,	1 pont	
a kedvező esetek száma: $\binom{17}{5}$.	1 pont	
(Alkalmazva a klasszikus valószínűség modelljét:) $\dfrac{\binom{17}{5}}{\binom{25}{5}} = \dfrac{6188}{53130} \approx 0{,}1165.$	1 pont	
0,12 (illetve 11,65%) a valószínűsége annak, hogy 5 nőt választanak ki.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

II. B

16. a)		
A háromszög harmadik oldalának c hosszára (a háromszög-egyenlőtlenség miatt) $20+c>22$	1 pont	
és $c<20+22$ egyenlőtlenségeknek teljesülni kell.	1 pont	
Így $2<c<42$.	1 pont	
Ha a harmadik oldal is egész, c legkisebb értéke 3, legnagyobb értéke 41 lehet.	1 pont	
Ez 39 megfelelő háromszöget jelent.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b)		
(A két adott oldal által közbezárt szöget γ-val jelölve) $88=\frac{20\cdot 22\cdot \sin\gamma}{2}$.	1 pont	
Ebből $\sin\gamma = 0{,}4$.	1 pont	
$\gamma_1 \approx 23{,}6^\circ$	1 pont	
$\gamma_2 \approx 156{,}4^\circ$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16.c)		
$\gamma_1 \approx 23{,}6^\circ$ esetében a harmadik oldal hosszát (c_1) koszinusztétel alkalmazásával számíthatjuk ki.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
$c_1^2 \approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 23{,}6^\circ$	1 pont	
$c_1^2 \approx 77{,}568$,	1 pont	
és ebből $c_1 \approx 8{,}8$ egység hosszú.	1 pont	
$\gamma_2 \approx 156{,}4^\circ$ esetében a harmadik oldal hossza (c_2): $c_2^2 \approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 156{,}4^\circ$.	1 pont	
$c_2^2 \approx 884-880\cdot(-0{,}9164)$, azaz $c_2^2 \approx 1690{,}4$ és ebből	1 pont	
$c_2 \approx 41{,}1$ egység hosszú.	1 pont	
A háromszög harmadik oldala $\approx 8{,}8$ egység vagy $\approx 41{,}1$ egység hosszúlehet.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	*Ha csak az egyik esettel számol, erre a részre maximum 4 pontot kaphat.*

17. a)		
Gábor fizetendő bérleti díja mértani sorozat szerint nő, $a_1 = 100$ és $a_{24} = 200$.	1 pont	
$100 \cdot q^{23} = 200$, $q^{23} = 2$ (ahol $q = 1 + \frac{p}{100}$)	1 pont	
$q = \sqrt[23]{2} = 2^{\frac{1}{23}}$ $(\approx 1{,}0306)$	1 pont	
p=3,06,	1 pont	
azaz Gábornak havonta 3,06%-kal kell több bérleti díjat fizetnie.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17.b)		
Péter bérleti díja számtani sorozat szerint nő, $b_1 = 100$ és $b_{24} = 200$,	1 pont	
$200 = 100 + 23 \cdot d$	1 pont	
$d = \frac{100}{23} \approx 4{,}35$,a havi növekedés 4,35 tallér.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17.c)		
A sorozatok első 24 tagjának összege:	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
$S_{Gábor} = 100 \cdot \frac{\left(\sqrt[23]{2}\right)^{24} - 1}{\sqrt[23]{2} - 1} \approx 3468{,}45$.	2 pont	
$S_{Péter} = \frac{100 + 200}{2} \cdot 24 = 3600$.	2 pont	
Péter 132 tallérral több bérleti díjat fizet 24 hónap alatt, mint Gábor.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
Grafikusan szemléltetve a havi bérleti díjakat látható, hogy Péter minden hónapban több bérleti díjat fizetne, mint Gábor (az 1. és a 24. hónap kivételével). Ezért nyilvánvaló, hogy Péter a 24 hónap alatt több bérleti díjat fizetne, mint Gábor. A világosan megadott grafikonokra épülő helyes gondolatért 3 pont adható.		

17.d)		
Péter az első 12 hónapban $S_{12}=\dfrac{2\cdot 100+11\cdot\dfrac{100}{23}}{2}\cdot 12\approx 1487$ tallér bérleti díjat fizet,	1 pont	
a második 12 hónapban 2113 tallért.	1 pont	
$\dfrac{2113}{1487}\approx 1{,}421$, tehát Péter a második évben 42,1%-kal több bérleti díjat fizet, mint az elsőben.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. a) első megoldás		
Ha figyelmen kívül hagyjuk, hogy a két áru nem kerülhet egymás mellé, akkor 6!-féle sorrendben rakható ki a hatféle áru.	1 pont	
Ha a két áru egymás mellé kerül, de a sorrendjüket nem különböztetjük meg, 5!-féle elhelyezés lehetséges.	1 pont	
Ha e két áru sorrendjét is megkülönböztetjük: $2\cdot 5!$ sorrendbe rakható a hat áru.	1 pont	
A megfelelő sorrendekszámát megkapjuk, ha az összes esetből kivonjuk azon sorrendek számát, amelyekben egymás mellé kerül a zsemlemorzsa és a búzadara: $6!-2\cdot 5!$.	2 pont	*Kevésbé részletezett gondolatmenetért is jár a 2 pont.*
Tehát 480 sorrendbe rakhatja ki az árufeltöltő a hatféle árut.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	*Ha nem veszi figyelembe, hogy a két áru nem kerülhet egymás mellé legfeljebb 1 pont adható.*

18. a) második megoldás		
Csak a búzadara és a zsemlemorzsa $6\cdot 5$, azaz 30-féle sorrendben lenne elhelyezhető, ha egymás mellé is kerülhetnének.	1 pont	
5 esetben kerülhet egymás mellé e két áru, ha a sorrendjüket nem vesszük figyelembe,	1 pont	
de mivel a sorrend is számít, ezért 10 esetben.	1 pont	
Így $(30-10=)$ 20-féle sorrendben rakhatja ki e két árut úgy, hogy ne kerüljenek egymás mellé.	1 pont	
Mind a 20 esetben a többi négy árut 4!-féleképpen helyezheti el.	1 pont	
Tehát $20\cdot 4!=480$-féle sorrendbe rakhatja ki a hatféle árut.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. b)		
Összesen 325 (=176+109+40) db kenyeret rendeltek és 42 db-ot küldtek vissza,	1 pont	
ez a megrendelt mennyiség 12,9%-a.	1 pont	
Összesen 695 (=314+381) péksüteményt rendeltek és 34 db-ot küldtek vissza,	1 pont	
ez a megrendelt mennyiség 4,9%-a.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18.c)		
Az egyes napokon eladott péksütemények száma: 124; 133; 132; 122; 150 db.	1 pont	
A két napot $\binom{5}{2}$ - féleképpen jelölhetjük meg.	1 pont	
(3 napon adtak el legalább 130 db-ot.) $\binom{3}{2}$-féle kiválasztása lehet a kívánt 2 napnak,	1 pont	
így a keresett valószínűség $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=0,3$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. d)		
1 kg-os fehér kenyérből ($\frac{155}{5}=$) 31 db-ot, ½ kg-os fehér kenyérből ($\frac{95}{5}=$) 19 db-ot, rozskenyérből ($\frac{33}{5}=6,6$) 7 db-ot,	2 pont	*Két helyes válasz 1 pont, egy helyes válaszért nem jár pont.*
zsemléből 58, kifliből 68 db-ot rendeltek.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	