ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. május 7.

MATEMATIKA
ROMÁN NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTÉRIUMA

Informații utile

Indicații pentru corectare:

1. Corectarea lucrărilor se va efectua cu o **culoare diferită** de cea folosită de candidat. Marcarea greşelilor, lipsurilor, etc. se face conform practicii de corectare.
2. Primul dintre chenarele gri de lângă probleme conține punctajul maxim care se poate acorda la problema respectivă, **punctajul** acordat de profesorul care corectează se înscrie în **chenarul** de alături.
3. În cazul **rezolvării ireproşabile** a unei probleme, este de ajuns să se înscrie punctajul maxim în chenarul corespunzător.
4. În cazul rezolvării cu greşeli, sau cu lipsuri a problemei, vă rugăm să scrieți şi **punctele parțiale** acordate pe unele părți ale lucrării.
5. Profesorul examinator nu va lua în considerare acele părți ale lucrării, care sunt scrise cu creionul, în afara figurilor.

Indicații asupra conținutului evaluării:

1. La unele probleme s-a dat punctajul pentru mai multe soluții. Dacă **soluția obținută de candidat este diferită** de acestea, căutați părți echivalente cu cele din soluția din barem, pe baza căreia se corectează şi se notează lucrarea.
2. Punctele din baremul de corectare-notare se pot **descompune** în puncte parțiale. Numărul de puncte acordate nu pot fi decât numere întregi.
3. Dacă raționamentul şi rezultatul sunt evident corecte, se poate acorda punctaj maxim şi dacă rezolvarea este **mai puțin detaliată** decât cea din baremul de corectare-notare.
4. Dacă în rezolvare s-au comis **greşeli de calcul**, sau apar inexactitudini nu se acordă punct pentru partea la care a greşit candidatul. Dacă candidatul lucrează mai departe logic corect, dar cu valori inițiale parțial greşite, punctajele parțiale trebuie să fie acordate în continu.
5. În cazul **greşelilor de principiu**, în cadrul unei unități logice (acestea sunt marcate prin linie dublă în baremul de corectare-notare) nu se acordă punct, chiar dacă formal operațiunea matematică este corectă. Însă dacă candidatul calculează în continuare corect, cu valorile inițial obținute în urma unei greşeli de principiu, i se acordă punctajul parțial maxim posibil în această unitate logică sau parte a problemei, dacă problema de rezolvat în esență nu s-a schimbat.
6. Dacă în baremul de corectare-notare o **unitate de măsură** este dată între paranteze, rezultatul obținut este considerat de valoare totală, chiar dacă această unitate de măsură lipseşte din rezultatul obținut.
7. Dacă la o problemă candidatul a dat mai multe rezolvări corecte, se va lua în considerare **numai rezolvarea indicată de către candidat.**
8. Pentru rezolvare **nu se pot acorda puncte de premiu** (punct în plus la punctajul maxim pentru rezolvare, sau pentru rezolvarea parțială respectivă).
9. Nu se **scad puncte** în urma calculelor parțiale greşite sau în urma operațiunilor parțiale greşite, dacă ele nu sunt folosite în continuare în rezolvarea problemei.
10. **În partea II. B a lucrării vor fi notate numai 2 dintre cele 3 probleme date**. Candidatul a trecut în pătratul alăturat – probabil în acest scop – numărul problemei pe care nu o vom lua în considerare la determinarea notei finale a lucrării. Ca atare, o eventuală rezolvare la problema respectivă nici nu trebuie corectată. Astfel, dacă pentru profesorul care corectează nu este indicat **clar şi univoc** care problemă nu a fost aleasă spre rezolvare de către candidat, atunci ultima în ordinea problemelor prezentate spre rezolvare nu va fi notată.

I.

1.		
Fracția obținută în urma simplificării: $\frac{a-2b}{3}$.	2 puncte	*Cele 2 puncte nu se pot descompune.*
Total:	**2 puncte**	

2.		
Se obține un cilindru de rotație, raza la bază este 5 cm, înălțimea este 12 cm.	1 punct	*Acest punct se acordă dacă raționamentul este indicat direct pe figură.*
$V = 25\pi \cdot 12$ (cm^3).	1 punct	
Volumul cilindrului de rotație este 300π cm^3.	1 punct	*Rezultatul dat sub forma unei fracții zecimale are la fel valoare totală.*
Total:	**3 puncte**	

3.		
Numărul rădăcinilor reale este: 1.	2 puncte	*Răspunsul x=5 valorează 1 punct. Dacă răspunsul este 5, se acordă 0 puncte.*
Total:	**2 puncte**	

4.		
$x_1 = 14,\ x_2 = -14$	2 puncte	*Câte 1 punct pentru fiecare răspuns corect.*
Total:	**2 puncte**	

5.		
Mijlocul are vectorul de poziție: $\vec{f} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.	1 punct	
După reordonare avem: $\vec{b} = 2\vec{f} - \vec{a}$.	1 punct	
Total:	**2 puncte**	

6.		
Astfel cel mai mic unghi pozitiv este de 30º.	2 puncte	*pentru scrierea expresiei $750^o = 2 \cdot 360^o + 30^o$ se acordă 1 punct*
Total:	**2 puncte**	

7.		
$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	1 punct	
Valoarea minimă a acestui pătrat se obține când 0 se ridică la pătrat. Funcția ia valoarea minimă pentru $x = -9$.	1 punct	
Total:	**2 puncte**	

8.		
Avem în total 2^4=16 numere pozitive de cinci cifre.	2 puncte	
Total:	**2 puncte**	

9.		
grupa I 180 de persoane, grupa II 240 de persoane, grupa III 300 de persoane.	1-1 punct	
Total:	**3 puncte**	

10.		
Aducem ecuația la forma de $2x-7y=0$.	1 punct	
Un vector normal al dreptei *e* perpendicular pe această dreptă este **n** (7 ; 2),	1 punct	
astfel ecuația dreptei *e* este $7x + 2y = 33$.	1 punct	*Ecuațiile dreptelor scrise corecte în orice formă sunt de valoare totală.*
Total:	**3 puncte**	

11.		
A: adevărat; B: fals; C: adevărat; D: adevărat.	1-1 punct	.
Total:	**4 puncte**	

12.		
Scriem termenii progresiei: $a_1=-1,\quad a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_4=1,\quad a_5=1,\quad a_6=2$	2 puncte	
Astfel $S_6=4$.	1 punct	
Total:	**3 puncte**	

II. A

13. a)		
Latura pătratului este a, laturile dreptunghiurilor sunt a, respectiv $\frac{a}{3}$.	1 punct	*Acest punct se acordă şi dacă notațiile apar numai pe figură.*
Perimetrul unui dreptunghi este $2a+\frac{2a}{3}=24$,	2 puncte	
de unde obținem $a=9$ cm.	1 punct	
Aria pătratului este 81 cm^2.	1 punct	
Total:	**5 puncte**	

13. b) prima soluție		
Pe baza teoremei lui Pitagora avem $13^2-12^2=x^2$ (sau tripletul de numere pitagoreice 13,12, 5),	1 punct	
cateta (BP) a triunghiului dreptunghic este 5 cm.	1 punct	
Aria triunghiului se poate scrie în două feluri: $T=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}$,	2 puncte	
de unde $a\cdot b=c\cdot m_c$,	1 punct	
deci $m_c=\frac{a\cdot b}{c}=\frac{60}{13}$.	1 punct	
Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei are lungimea de 4,6 cm.	1 punct	
Total:	**7 puncte**	

13. b) a doua soluție		
Pe baza teoremei lui Pitagora $13^2-12^2=x^2$ (sau tripletul de numere pitagoreice 13,12, 5),	1 punct	
cateta (BP) a triunghiului este 5 cm.	1 punct	
Pe baza teoremei catetei $5=\sqrt{13\cdot p}$,	2 puncte	
$p=\frac{25}{13}\approx 1{,}92$.	1 punct	
Din teorema lui Pitagora $m_c{}^2=5^2-\left(\frac{25}{13}\right)^2$	1 punct	
Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este 4,6 cm.	1 punct	
Total:	**7 puncte**	

13. b) **a treia soluție**		
Notăm prin α unghiul de la vârful A al triunghiului dreptunghic ABP, respectiv prin Q piciorul înălțimii corespunzătoare ipotenuzei AP. În triunghiul dreptunghic ABP avem $\cos\alpha = \frac{AB}{AP} = \frac{12}{13}$.	2 puncte	
$\alpha \approx 22{,}62°$.	1 punct	*Se acordă acest punct şi dacă calculul corect al valoarii lui $\sin\alpha$ se efectuează pe parcurs.*
În triunghiul dreptunghic AQB avem $\sin\alpha = \frac{BQ}{AB} = \frac{BQ}{12}$.	2 puncte	
$BQ = 12 \cdot \sin\alpha \approx 12 \cdot 0{,}3846 \approx 4{,}6152$.	1 punct	
Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este 4,6 cm.	1 punct	
Total:	**7 puncte**	

14. a)		
Domeniul de definiție: $\left(din\ 2x-5>0 \quad \text{şi}\ x>0\right)\ x>\frac{5}{2}$.	1 punct	*Se acordă acest punct şi dacă se lucrează cu ecuația obținută în consecință, iar rădăcina obținută se verifică prin substituție.*
(Utilizând identitățile logaritmului obținem) $2x-5=\frac{x}{3}$.	2 puncte	
După ordonarea ecuției avem $x = 3$.	1 punct	
Rădăcina obținută aparține domeniului de definiție, deci este o soluție.	1 punct	
Total:	**5 puncte**	

14. b)

$0 \le 13-2x$, de unde $x \le 6{,}5$.	1 punct	*Se acordă aceste puncte şi dacă se lucrează cu ecuaţia obţinută în consecinţă, rădăcina obţinută se verifică prin substituţie şi rădăcina falsă este exclusă.*
$0 \le \sqrt{13-2x} = x-5$, de aici $5 \le x$. Deci ecuaţia poate avea soluţii numai pentru $5 \le x \le 6{,}5$.	1 punct	
Prin ridicarea la pătrat a ambelor părţi: pătratul părţii din stânga este $13-2x$.	1 punct	
Pătratul părţii din dreapta: $x^2 - 10x + 25$.	1 punct	
Ecuaţia de rezolvat de gradul doi: $0 = x^2 - 8x + 12$.	1 punct	
De unde obţinem $x = 6$ sau $x = 2$.	1 punct	
Singura soluţie reală pe mulţimea de bază este 6.	1 punct	
Total:	**7 puncte**	

15. a)

20 de persoane posedă ambele diplome,	1 punct	
fiindcă numărul diplomelor este 42+28=70, care este cu 20 mai mult, decât numărul total al angajaţilor care au obţinut o diplomă.	1 punct	*Se acordă acest punct şi pentru prezentarea corespunzătoare a diagramei de mulţimi.*
Astfel 22 de persoane sunt numai tehnicieni.	1 punct	
Total:	**3 puncte**	

15. b)

Dacă numărul angajaţilor sub 30 de ani este x,	1 punct	*Acest punct se acordă şi dacă raţionamentul este prezentat numai pe parcursul rezolvării.*
atunci media salariilor: $\frac{x \cdot 148000 + (50-x) \cdot 173000}{50} = 165000$.	1 punct	
$x = 16$	1 punct	
16 persoane sub 30 de ani lucrează în laborator.	1 punct	
Total:	**4 puncte**	

15. c)		
Cheltuielile vor fi acoperite pentru 5 angajaţi.	1 punct	
Numărul cazurilor posibile: $\binom{25}{5}$,	1 punct	
Numărul cazurilor favorabile: $\binom{17}{5}$.	1 punct	
(Aplicând modelul probabilităţii clasice:) $\frac{\binom{17}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{6188}{53130} \approx 0{,}1165.$	1 punct	
0,12 (adică 11,65%) este probabilitatea că 5 femei sunt alese.	1 punct	
Total:	**5 puncte**	

II. B

16. a)		
Lungimea *c* a celei de a treia laturi (din cauza inegalității triunghiulare) trebuie să satisfacă condiția: $20+c>22$	1 punct	
şi $c<20+22$.	1 punct	
Astfel $2<c<42$.	1 punct	
Dacă şi cea de a treia latură este un număr întreg, cea mai mică valoare a lui *c* este 3, cea mai mare valoare este 41.	1 punct	
Aceasta înseamnă că există 39 de triunghiuri care corespund.	1 punct	
Total:	**5 puncte**	

16. b)		
(Notând prin γ unghiul format de cele două laturi, avem) $88=\frac{20\cdot 22\cdot \sin\gamma}{2}$.	1 punct	
De aici obținem $\sin\gamma = 0,4$.	1 punct	
$\gamma_1 \approx 23,6^\circ$	1 punct	
$\gamma_2 \approx 156,4^\circ$	1 punct	
Total:	**4 puncte**	

16. c)		
În cazul $\gamma_1 \approx 23,6^\circ$ lungimea (c_1) a celei de a treia laturi se calculeaza cu teorema cosinusurilor.	1 punct	*Acest punct se acordă şi dacă raționamentul este prezentat numai pe parcursul rezolvării.*
$c_1^2 \approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 23,6^\circ$	1 punct	
$c_1^2 \approx 77,568$,	1 punct	
şi de aici obținem $c_1 \approx 8,8$ unități de lungime.	1 punct	
În cazul $\gamma_2 \approx 156,4^\circ$ lungimea (c_2)a celei de a treia laturi : $c_2^2 \approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 156,4^\circ$.	1 punct	
$c_2^2 \approx 884-880\cdot(-0,9164)$, $c_2^2 \approx 1690,4$ din care	1 punct	
$c_2 \approx 41,1$ unități de lungime.	1 punct	
Cea de a treia latură are lungimea $\approx 8,8$ sau $\approx 41,1$ unități.	1 punct	
Total:	**8 puncte**	*La această parte, dacă se tratează numai un caz, se acordă cel mult 4 puncte .*

17. a)		
Gábor plăteşte o chirie, care creşte după o progresie geometrică, $a_1 = 100$ şi $a_{24} = 200$.	1 punct	
$100 \cdot q^{23} = 200$, $q^{23} = 2$ (unde $q = 1 + \frac{p}{100}$)	1 punct	
$q = \sqrt[23]{2} = 2^{\frac{1}{23}}$ $(\approx 1{,}0306)$	1 punct	
$p = 3{,}06$,	1 punct	
adică Gábor plăteşte lunar o chirie cu 3,06% mai mare decât chiria din luna anterioară.	1 punct	
Total:	**5 puncte**	

17. b)		
Péter plăteşte o chirie care creşte după o progresie aritmetică, $b_1 = 100$ şi $b_{24} = 200$,	1 punct	
$200 = 100 + 23 \cdot d$	1 punct	
$d = \frac{100}{23} \approx 4{,}35$, adică o creştere lunară de 4,35 taleri.	1 punct	
Total:	**3 puncte**	

17. c)		
Suma primelor 24 de termeni ai progresiilor:	1 punct	*Acest punct se acordă şi dacă raţionamentul este prezentat numai pe parcursul rezolvării.*
$S_{Gábor} = 100 \cdot \frac{\left(\sqrt[23]{2}\right)^{24} - 1}{\sqrt[23]{2} - 1} \approx 3468{,}45$.	2 puncte	
$S_{Péter} = \frac{100 + 200}{2} \cdot 24 = 3600$.	2 puncte	
Péter plăteşte cu 132 taleri mai multă chirie dacât Gábor de-a lungul celor 24 de luni.	1 punct	.
Total:	**6 puncte**	
Din reprezentarea grafică a chiriilor lunare se observă că Péter ar plăti mai multă chirie ca Gábor (în afara primei luni şi a lunii 24). Deci este evident că Péter ar plăti în total mai multă chirie decât Gábor de-a lungul celor 24 de luni. Se acordă 3 puncte pentru raţionamentul corect bazat pe graficele date.		

17. d)		
Péter plăteşte în primele 12 luni o chirie totală de $S_{12} = \frac{2\cdot 100 + 11\cdot \frac{100}{23}}{2}\cdot 12 \approx 1487$ de taleri,	1 punct	
iar în următoarele 12 luni 2113 de taleri.	1 punct	
$\frac{2113}{1487} \approx 1{,}421$, deci Péter plăteşte în cel de al doilea an o chirie totală, cu 42,1% mai mare decât în primul an.	1 punct	
Total:	**3 puncte**	

18. a) prima soluție		
Dacă ignorăm faptul că cele două produse nu pot fi aşezate în compartimente adiacente, avem un număr total de 6! posibilități pentru expunerea celor şase produse.	1 punct	
Dacă cele două produse sunt aşezate în compartimente adiacente, fără fixarea ordinii lor, avem 5! de posibilități pentru aşezarea celor şase produse în compartimente.	1 punct	
Dacă ordinea aşezării celor două produse este fixată, avem $2\cdot 5!$ posibilități pentru expunerea celor şase produse în compartimente.	1 punct	
Numărul ordinelor corespunzătore de aşezare se obține dacă din numărul total scădem numărul acelor ordini de aşezare în care pesmetul şi grişul sunt expuşi unul lângă altul: $6! - 2\cdot 5!$.	2 puncte	*Se acordă cele 2 puncte şi dacă raționamentul este mai puțin detaliat.*
Deci avem 480 de ordini de aşezare pentru expunerea celor şase produse.	1 punct	
Total:	**6 puncte**	*Dacă aşezarea adiacentă a celor două produse nu se ia în considerare, se acordă cel mult 1 punct.*

18. a) **a doua soluție**		
Există $6\cdot 5$, adică 30 de feluri de aşezare în compartimente numai pentru griş şi pesmet, dacă acceptăm că cele două produse pot fi aşezate şi unul lîngă altul.	1 punct	
În 5 cazuri pot fi adiacente cele două produse, dacă ordinea lor nu este fixată,	1 punct	
dacă ordinea lor este fixată, avem 10 cazuri.	1 punct	
Astfel vom avea $(30-10=)$ 20 de ordini de aşezare a celor două produse, dacă ele nu sunt aşezate în compartimente adiacente.	1 punct	
În fiecare din cele 20 de cazuri restul de patru produse se pot aşeza în 4! feluri.	1 punct	
Deci există $20\cdot 4!=480$-feluri de ordine de aşezare pentru cele şase produse.	1 punct	
Total:	**6 puncte**	

18. b)		
Gestionarul a comandat în total 325 (=176+109+40) de bucăți de pâine din care s-a trimis înapoi 42 de bucăți,	1 punct	
acest număr este 12,9 % din cantitatea comandată.	1 punct	
Gestionarul a comandat în total 695 (=314+381) de bucăți de produse de patiserie, din care s-a trimis înapoi 34 de bucăți,	1 punct	
acest număr este 4,9 % din cantitatea comandată.	1 punct	
Total:	**4 puncte**	*Nu se acordă aceste 4 puncte, dacă calculul se rapotează la cantitatea vândută.*

18. c)		
Numărul de produse de patiserie vândute în zilele respective: 124; 133; 132; 122; 150 de bucăți.	1 punct	
Cele două zile se pot marca în $\binom{5}{2}$ – feluri.	1 punct	
(în 3 dintre zilele respective s-au vândut cel puțin 130 de bucăți), cele 2 zile se pot alege în $\binom{3}{2}$-feluri,	1 punct	
astfel probabilitatea obținută este $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=0{,}3$	1 punct	
Total:	**4 puncte**	

18. d)		
S-a comandat: pâine albă de 1 kg ($\frac{155}{5}=$) 31 de bucăți, pâine albă de ½ kg ($\frac{95}{5}=$) 19 de bucăți, pâine de secară ($\frac{33}{5}=6{,}6$) 7 bucăți,	2 puncte	*Se acordă 1 punct pentru două răspunsuri corecte. Nu se acordă punct pentru un singur răspuns corect.*
chifle 58, cornuri 68 de bucăți .	1 punct	
Total:	**3 puncte**	