ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. május 7.

MATEMATIKA SPANYOL NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Información importante

Cuestiones formales para la corrección del examen:

1. El profesor tiene que corregir el examen con un **bolígrafo de diferente color** al utilizado por el alumno. El profesor indicará los errores, los pasos que faltan, etc., tal y como esté acostumbrado.
2. En los recuadros grises de puntuación, el primero indica la máxima puntuación que se puede dar y el **recuadro** de al lado recoge los **puntos** que ha dado el profesor.
3. **Si no hay errores en la resolución,** es suficiente escribir los puntos máximos en el recuadro correspondiente.
4. Si hay errores o faltan pasos, indique, por favor, **los puntos correspondientes a cada parte**.
5. El profesor que corrige no podrá evaluar todo lo que esté escrito a lápiz aparte del dibujo.

Cuestiones de contenido:

1. En algunos ejercicios, les hemos ofrecido la puntuación correspondiente a varias resoluciones. Si usted encuentra **otra resolución,** busque, por favor, las partes equivalentes de las resoluciones que propone la guía y reparta los puntos según dichas partes.
2. **Se pueden dividir** los puntos que la guía recomienda para indicar distintos pasos de una parte. Pero, en cualquier caso, los puntos que se den siempre serán enteros.
3. Si el desarrollo de la resolución y los resultados finales son correctos, se puede dar la puntuación máxima incluso si **las explicaciones no son tan amplias** como las que aparecen en la guía.
4. Si en una parte de la resolución, el estudiante comete **un error de cálculo** o de precisión, no recibirá los puntos correspondientes a esta parte. Si al arrastrar este error, el resto de los pasos realizados son correctos y no cambia el sentido del problema, entonces se puntuarán el resto de los pasos.
5. En caso de **un error de aplicación teórica**, dentro de un razonamiento en la resolución (los razonamientos distintos aparecen separados con una línea doble en la guía), no se pueden dar puntos ni siquiera por los pasos matemáticamente correctos hechos tras cometer el error. Pero si en el siguiente razonamiento, se sigue trabajando bien, a pesar del resultado incorrecto causado por dicho error, se darán los puntos máximos para las siguientes partes de la resolución del problema, si no ha cambiado el sentido del mismo.
6. Si en la guía, **algún comentario** o **una unidad de medida** está entre paréntesis, la solución será correcta aunque no se escriba.
7. Si se escriben varios procedimientos para resolver un ejercicio, **sólo se puntuará uno de ellos, el que el alumno examinado haya indicado como válido**.
8. **No se pueden dar puntos extra** que excedan los puntos máximos que se pueden dar para el ejercicio o una parte de él.
9. **No se restan puntos** si aparecen errores en algún paso o en partes de la resolución que el alumno no utiliza después para resolver el ejercicio.
10. **De los tres ejercicios propuestos en la parte II B del examen sólo se pueden puntuar dos.** Probablemente el estudiante habrá indicado el número del ejercicio eliminado, el que no se puntuará, en el cuadrado correspondiente. Si el alumno hubiera resuelto este ejercicio no habría que corregirlo. Si no queda claro cuál es el ejercicio que el alumno examinado no desea que se le corrija, entonces automáticamente, según el orden en que aparecen los ejercicios, no se corregirá el último.

I.

1.		
La fracción obtenida después de simplificar: $\frac{a-2b}{3}$.	2 puntos	*No se pueden dividir los 2 puntos.*
Total:	**2 puntos**	

2.		
Se forma un cilindro de revolución de radio de la base 5 cm y altura, 12 cm.	1 punto	*Si estas explicaciones se indican en una figura, se dará este punto.*
$V = 25\pi \cdot 12$ (cm^3).	1 punto	
El volumen del cilindro es 300π cm^3.	1 punto	*Si da la respuesta en forma decimal, también recibirá la puntuación completa.*
Total:	**3 puntos**	

3.		
El número de raíces reales es 1.	2 puntos	*Si la respuesta es x=5, recibirá 1 punto. Si la respuesta es 5, se darán 0 puntos.*
Total:	**2 puntos**	

4.		
$x_1 = 14$, $x_2 = -14$	2 puntos	*Por cada respuesta correcta, 1 punto.*
Total:	**2 puntos**	

5.		
El vector de posición correspondiente al punto medio: $\vec{f} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.	1 punto	
Despejando se obtiene: $\vec{b} = 2\vec{f} - \vec{a}$.	1 punto	
Total:	**2 puntos**	

6.		
El menor ángulo positivo buscado mide 30º.	2 puntos	*750º = 2·360º+30º recibirá 1 punto por la argumentación*
Total:	**2 puntos**	

7.		
$x^2+18x+81=(x+9)^2$	1 punto	
Un número al cuadrado alcanza su valor mínimo si elevamos 0 al cuadrado. La función alcanza su valor mínimo cuando $x=-9$.	1 punto	
Total:	**2 puntos**	

8.		
Hay 2^4=16 números positivos de cinco cifras.	2 puntos	
Total:	**2 puntos**	

9.		
Grupo I compuesto por 180 personas, Grupo II formado por 240 personas, Grupo III formado por 300 personas.	1 punto, 1 punto, 1 punto.	
Total:	**3 puntos**	

10.		
Consideramos la ecuación en su forma $2x-7y=0$.	1 punto	
Un vector normal de la recta e, perpendicular a la anterior es **n** (7 ; 2),	1 punto	
así, la ecuación de la recta e es $7x + 2y = 33$.	1 punto	*Si emplea correctamente las ecuaciones de las rectas en cualquiera de sus formas, recibirá la puntuación completa.*
Total:	**3 puntos**	

11.		
A: verdadera; B: falsa; C: verdadera; D: verdadera.	1 punto, 1 punto, 1 punto, 1 punto.	
Total:	**4 puntos**	

12.		
Escribimos los términos de la sucesión: $a_1=-1,\quad a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_4=1,\quad a_5=1,\quad a_6=2$.	2 puntos	
Así, $S_6=4$.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

II. A

13. a)		
Llamamos a al lado del cuadrado. Así, los lados del rectángulo serán a y $\frac{a}{3}$.	1 punto	*Si la notación empleada sólo se deduce de la figura, también se dará este punto.*
El perímetro de un rectángulo es $2a + \frac{2a}{3} = 24$,	2 puntos	
de donde $a = 9$ cm.	1 punto	
El área del cuadrado mide 81 cm^2.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

13. b) primer método		
Por el teorema de Pitágoras, $13^2 - 12^2 = x^2$ (o teniendo en cuenta que 13, 12 y 5 es una terna Pitagórica),	1 punto	
el cateto del triángulo rectángulo (BP) mide 5 cm.	1 punto	
El área del triángulo se puede escribir de dos maneras: $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$,	2 puntos	
de donde se deduce que $a \cdot b = c \cdot m_c$,	1 punto	
es decir, que $m_c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{60}{13}$.	1 punto	
La longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa es de 4,6 cm.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

13. b) segundo método		
Por el teorema de Pitágoras, $13^2 - 12^2 = x^2$ (o teniendo en cuenta que 13, 12 y 5 es una terna Pitagórica),	1 punto	
el cateto del triángulo rectángulo (BP) mide 5 cm.	1 punto	
Por el teorema del cateto, $5 = \sqrt{13 \cdot p}$,	2 puntos	
$p = \frac{25}{13} \approx 1{,}92$.	1 punto	
Con el teorema de Pitágoras, $m_c{}^2 = 5^2 - \left(\frac{25}{13}\right)^2$	1 punto	
La altura correspondiente a la hipotenusa mide 4,6 cm.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

13. b) tercer método		
Sea α el ángulo del vértice *A* en el triángulo rectángulo *ABP* y sea *Q*, el extremo (punto pie) de la altura correspondiente a la hipotenusa *AP*. En el triángulo rectángulo ABP, $\cos\alpha = \frac{AB}{AP} = \frac{12}{13}$.	2 puntos	
$\alpha \approx 22{,}62°$.	1 punto	*También se dará este punto si en los pasos siguientes calcula correctamente el valor del* $\operatorname{sen}\alpha$.
En el triángulo rectángulo AQB, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{BQ}{AB} = \frac{BQ}{12}$.	2 puntos	
$BQ = 12 \cdot \operatorname{sen}\alpha \approx 12 \cdot 0{,}3846 \approx 4{,}6152$.	1 punto	
La longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa es de 4,6 cm.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

14. a)		
Dominio de definición: (debido a $2x-5>0$ y $x>0$) $x > \frac{5}{2}$.	1 punto	*Si trabaja con las ecuaciones consecuentes y comprueba las raíces obtenidas sustituyéndolas en la ecuación original, también recibirá este punto.*
(Utilizando las propiedades del logaritmo) $2x-5 = \frac{x}{3}$.	2 puntos	
Tras ordenar la ecuación se obtiene que $x = 3$.	1 punto	
La raíz obtenida es un elemento del dominio y por tanto es solución de la ecuación.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

14. b)		
$0 \le 13-2x$, así $x \le 6{,}5$.	1 punto	*Si trabaja con las ecuaciones consecuentes y comprueba las raíces obtenidas, descartando la raíz falsa, recibirá estos dos puntos.*
$0 \le \sqrt{13-2x} = x-5$, de donde $5 \le x$. Por tanto, la ecuación sólo puede tener solución si $5 \le x \le 6{,}5$.	1 punto	
Elevamos al cuadrado ambos lados: el cuadrado de la parte izquierda es $13-2x$.	1 punto	
El cuadrado de la parte derecha: $x^2-10x+25$.	1 punto	
La ecuación de segundo grado a resolver: $0 = x^2-8x+12$.	1 punto	
De donde $x=6$ o $x=2$.	1 punto	
Teniendo en cuenta el conjunto de definición, la única solución válida de la ecuación es 6.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

15. a)		
Disponen de ambos títulos 20 personas,	1 punto	
ya que el número de los títulos mencionados es 42+28=70, que corresponde a 20 más que el total de los dueños de los mismos, es decir, los trabajadores.	1 punto	*También se dará este punto por un diagrama de conjuntos adecuado.*
Así hay 22 personas que sólo tienen el certificado de técnico.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

15. b)		
Sea *x* el número de trabajadores menores de 30 años,	1 punto	*Si esta explicación se deduce únicamente del desarrollo de la resolución, también recibirá este punto.*
entonces la media es $\frac{x\cdot 148000+(50-x)\cdot 173000}{50}=165\,000.$	1 punto	
$x=16$	1 punto	
En el laboratorio, hay 16 trabajadores menores de 30 años.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

15. c)		
Se pagarán los gastos a 5 trabajadores.	1 punto	
Casos posibles: $\binom{25}{5}$,	1 punto	
casos favorables: $\binom{17}{5}$.	1 punto	
(Aplicando la fórmula clásica de la probabilidad) $\frac{\binom{17}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{6188}{53130} \approx 0{,}1165.$	1 punto	
La probabilidad de que eligieran a 5 mujeres es de 0,12 (u 11,65%).	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

II. B

16. a)

Para el tercer lado del triángulo, lado *c*, se tienen que verificar las desigualdades $20+c>22$	1 punto	
y $c<20+22$, (debido a las desigualdades que verifican los lados de un triángulo)·	1 punto	
Por tanto, $2<c<42$.	1 punto	
Si el tercer lado es un número entero, el menor valor de *c* será 3, y el mayor valor que puede tomar es 41.	1 punto	
Lo que significa que hay 39 triángulos con estas características.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

16. b)

(Llamamos γ al ángulo formado por los dos lados conocidos) $88=\dfrac{20\cdot 22\cdot \text{sen}\gamma}{2}$.	1 punto	
De donde $\text{sen}\gamma=0{,}4$.	1 punto	
$\gamma_1\approx 23{,}6^\circ$	1 punto	
$\gamma_2\approx 156{,}4^\circ$	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

16. c)

En caso de $\gamma_1\approx 23{,}6^\circ$, podemos calcular la longitud del tercer lado (c_1) aplicando el teorema del coseno.	1 punto	*Si esta explicación se deduce únicamente del desarrollo de la resolución, entonces también recibirá este punto.*
$c_1^2\approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 23{,}6^\circ$	1 punto	
$c_1^2\approx 77{,}568$,	1 punto	
y así $c_1\approx 8{,}8$ unidades de longitud.	1 punto	
Para $\gamma_2\approx 156{,}4^\circ$, la longitud del tercer lado (c_2): $c_2^2\approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 156{,}4^\circ$.	1 punto	
$c_2^2\approx 884-880\cdot(-0{,}9164)$, por tanto $c_2^2\approx 1690{,}4$ y así	1 punto	
$c_2\approx 41{,}1$ unidades de longitud	1 punto	
El tercer lado del triángulo puede medir $\approx 8{,}8$ unidades o $\approx 41{,}1$ unidades.	1 punto	
Total:	**8 puntos**	*Si sólo lo resuelve considerando uno de los casos, podrá recibir un máximo de 4 puntos para esta parte.*

17. a)		
Las cuotas de alquiler que Gábor tiene que ir pagando, aumentan en función de una progresión geométrica, $a_1 = 100$ y $a_{24} = 200$.	1 punto	
$100 \cdot q^{23} = 200$, $q^{23} = 2$ (ahol $q = 1 + \frac{p}{100}$)	1 punto	
$q = \sqrt[23]{2} = 2^{\frac{1}{23}}$ $(\approx 1{,}0306)$	1 punto	
$p = 3{,}06$,	1 punto	
es decir, Gábor tiene que pagar cada mes un 3,06% más por el alquiler.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

17. b)		
Las cuotas de alquiler de Péter, aumentan en función de una progresión aritmética, $b_1 = 100$ y $b_{24} = 200$,	1 punto	
$200 = 100 + 23 \cdot d$	1 punto	
$d = \frac{100}{23} \approx 4{,}35$, el aumento mensual supone 4,35 *tallér*.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

17. c)		
La suma de los 24 primeros términos de las progresiones:	1 punto	*Si esta explicación se deduce únicamente del desarrollo de la resolución, se dará este punto.*
$S_{Gábor} = 100 \cdot \frac{\left(\sqrt[23]{2}\right)^{24} - 1}{\sqrt[23]{2} - 1} \approx 3468{,}45$.	2 puntos	
$S_{Péter} = \frac{100 + 200}{2} \cdot 24 = 3600$.	2 puntos	
Péter paga 132 *tallér* más que Gábor por el alquiler a lo largo de los 24 meses.	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

A través de una representación gráfica de las cuotas de alquiler mensuales, se puede observar que todos los meses Péter paga más por el alquiler que Gábor (excepto el mes primero y el mes 24).
Por lo tanto, es evidente que Péter paga más por el alquiler durante los 24 meses que Gábor.
Por una explicación correcta formulada a partir de un gráfico claro, se podrán dar 3 puntos.

17. d)		
El alquiler que paga Péter durante los 12 primeros meses es $S_{12}=\dfrac{2\cdot 100+11\cdot\dfrac{100}{23}}{2}\cdot 12\approx 1487$ *tallér*,	1 punto	
durante los 12 meses siguientes paga 2113 *tallér*.	1 punto	
$\dfrac{2113}{1487}\approx 1{,}421$, es decir, que Péter tiene que pagar 42,1% más de alquiler el segundo año que el primero.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

18. a) primer método		
Si no prestamos atención a que hay dos artículos que no pueden estar uno al lado del otro, entonces se puede establecer el orden de colocación de los seis artículos de 6! maneras distintas.	1 punto	
Si los dos artículos están uno al lado del otro, pero no distinguimos el orden entre ellos, habrá 5! maneras posibles de colocación.	1 punto	
Si consideramos el orden entre estos dos artículos: $2\cdot 5!$ maneras de establecer el orden de los seis artículos.	1 punto	
Obtenemos el número correspondiente de ordenaciones si restamos del total, el número de las ordenaciones en las que la sémola y el pan rallado están uno al lado del otro: $6!-2\cdot 5!$.	2 puntos	*Por una explicación no tan amplia, también recibirá los 2 puntos.*
Es decir, el reponedor puede establecer el orden de colocación de los seis artículos de 480 maneras.	1 punto	
Total:	**6 puntos**	*Si no tiene en cuenta que los dos productos no pueden estar uno al al lado del otro, se podrá dar 1 punto como máximo.*

18. a) **segundo método**		
Si sólo nos ocupamos de colocar la sémola y el pan rallado, entonces hay $6 \cdot 5$, es decir, 30 maneras de establecer su orden de colocación pudiendo estar uno al lado del otro.	1 punto	
En 5 casos pueden encontrarse uno al lado del otro, si no consideramos el orden entre ellos,	1 punto	
pero como el orden también cuenta, entonces hay 10 casos.	1 punto	
Así $(30-10=)$ 20 maneras distintas de colocar estos dos productos de modo que no estén uno al lado del otro.	1 punto	
En los 20 casos, los otros cuatro artículos se pueden ordenar de 4! maneras distintas.	1 punto	
Por tanto $20 \cdot 4! = 480$ maneras de establecer el orden de los seis artículos.	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

18. b)		
En total, encargó 325 (=176+109+40) unidades de pan y devolvió 42 unidades,	1 punto	
que corresponden al 12,9 % de la cantidad encargada.	1 punto	
En total, encargó 695 (=314+381) panecillos y devolvió 34 unidades,	1 punto	
que corresponden al 4,9 % de la cantidad encargada.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

18. c)		
El número de panecillos vendidos cada uno de los días: 124; 133; 132; 122; 150 unidades.	1 punto	
Podemos elegir dos días de $\binom{5}{2}$ maneras distintas.	1 punto	
(en 3 días vendieron por lo menos 130 unidades) así se pueden elegir los 2 días deseados de $\binom{3}{2}$ maneras distintas,	1 punto	
la probabilidad buscada, $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = 0{,}3$	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

18. d)		
Encargó, de pan blanco de 1 kg, ($\frac{155}{5}=$) 31 unidades, de pan blanco de ½ kg, ($\frac{95}{5}=$) 19 unidades, de pan integral, ($\frac{33}{5}=6{,}6$) 7 unidades,	2 puntos	*Por dos respuestas correctas, 1 punto. Por una respuesta correcta, no recibirá puntos.*
de panecillos redondos 58 y en forma de media luna, 68 unidades.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	