ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2013. május 7.

MATEMATIKA SZERB NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Важне информације

Формални захтеви:

1. Задатак треба исправити **хемијском оловком другачије боје** од оне коју користи кандидат, а грешке, недостатке итд. обележити одговарајући наставничкој пракси.
2. Међу сивим правоугаоницима који су поред задатака у првом је максималан број бодова за тај задатак, а **у други** наставник уписује постигнут **број бодова** за тај задатак.
3. У случају **потпуно исправног решења (без грешке)** у одговарајући правоугаоник је довољно уписати максималан број бодова.
4. У случају решења са недостатком/грешком, молимо да се на задатак напише појединачи **делимични број бодова**.
5. Осим скица (цртежа), делове који су написани графитном оловком наставник не може да вреднује (оцењује).

Садржајни захтеви:

1. Код појединих задатака смо дали бодовање за више начина решавања. Уколико се нађе тачно **решење различито од наведених**, потражите у упутству делове који се подударају и на основу тога извршите бодовање.
2. Бодови у упутству се могу даље **разложити**. Међутим, број бодова који се додељује може бити само цео број.
3. У случају тачног поступка решавања и коначног решења максималан број бодова се даје и онда ако је код кандидата опис из упутства дат са **мање детаља**.
4. Ако у решењу има **рачунске грешке**, нетачности, бодови се не дају само на онај део где је ученик начинио грешку. Ако са погрешним делимичним резултатом даље ради тачним поступком, а проблем за решавање се у суштини не мења, додељују му се даљи делимични бодови.
5. У случају **принципијелне грешке** у оквиру једне мисаоне целине (у упутству означено двоструком линијом) ни за формално тачне математичке поступке се бодови не додељују. Уколико ученик наставља са радом и као почетни податак узима лоше решење које је добио због принципијелне грешке, а даље тачно рачуна у следећој мисаоној целини или делу питања, онда за тај део добија максималан број бодова, уколико се проблем за решавање у суштини није променио.
6. Ако се у упутству за решавање у загради налази нека **напомена** или нека **мерна јединица**, у случају њиховог недостатка се решење сматра да има потпуну вредност.
7. Од више тачних покушаја решења за један задатак **вреднује се она варијанта коју је кандидат означио**.
8. За решења се **наградни бодови** (бодови који прелазе прописани максимални број за дати задатак или његов део) **не могу доделити**.
9. За делимичне прорачуне који су са грешкама али их кандидат при решавању задатка није искористио **не одузимају се бодови**.
10. **Од означених задатака у испитном делу II Б се од 3 задатка вреднују само решења за 2 задатка.** Кандидат је уписао у квадрат – вероватно – редни број задатка чије вредновање неће ући у укупан број бодова. Према томе, евентуално дато решење за означени задатак ни не треба исправљати. Ако није једносмислено јасно за који задатак кандидат не жели да се бодује, онда ће задатак који се не бодује аутоматски бити онај који је последњи по истакнутом редоследу.

I

1.		
Разломак добијен после скраћивања: $\frac{a-2b}{3}$.	2 бода	*Ова 2 бода се не могу разложити.*
Укупно:	**2 бода**	

2.		
Настаје обртни ваљак са полупречником основе 5 cm и висином од 12 cm.	1 бод	*Ако се ове мисли виде означене на скици, даје се 1 бод.*
$V = 25\pi \cdot 12$ (cm^3).	1 бод	
Запремина обртног ваљка је 300π cm^3.	1 бод	*Одговор написан у форми децималног разломка се прихвата.*
Укупно:	**3 бода**	

3.		
Број реалних корена: 1.	2 бода	*Ако је одговор x=5, даје се 1 бод.* *Ако је одговор 5, даје се 0 бодова.*
Укупно:	**2 бода**	

4.		
$x_1 = 14,\ x_2 = -14$	2 бода	*По 1 бод за тачне одговоре.*
Укупно:	**2 бода**	

5.		
Вектор положаја средишта дужи: $\vec{f} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.	1 бод	
Сређивањем: $\vec{b} = 2\vec{f} - \vec{a}$.	1 бод	
Укупно:	**2 бода**	

6.		
Најмањи тражени позитиван угао је 30°.	2 бода	*1 бод добија ако напише $750^o = 2 \cdot 360^o + 30^o$.*
Укупно:	**2 бода**	

7.		
$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	1 бод	
Квадрат неког броја је најмањи онда када 0 дижемо на квадрат. Функција за $x = -9$ узима најмању вредност.	1 бод	
Укупно:	**2 бода**	

8.		
Има 2^4=16 позитивних петоцифрених бројева.	2 бода	
Укупно:	**2 бода**	

9.		
I група 180 особа, II група 240 особа, III група 300 особа.	1 бод, 1 бод, 1 бод.	
Укупно:	**3 бода**	

10.		
Једначину ћемо написати у облику $2x-7y=0$.	1 бод	
Нормални вектор **n** праве *e* која је нормална на то је **n** (7 ; 2),	1 бод	
па је једначина праве *e* $7x + 2y = 33$.	1 бод	*Правилна употреба једначине праве у било ком облику се прихвата.*
Укупно:	**3 бода**	

11.		
A: тачно; B: нетачно; C: тачно; D: тачно.	1 бод, 1 бод, 1 бод, 1 бод.	
Укупно:	**4 бода**	

12.		
Написаћемо чланове низа: $a_1=-1,\quad a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_4=1,\quad a_5=1,\quad a_6=2$.	2 бода	
Па је $S_6=4$.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

II A

13. a)		
Страница квадрата је a, а странице правоугаоника су a, односно $\frac{a}{3}$.	1 бод	*Ако се ознаке утврде само на скици, и онда се додељује бод.*
Обим једног правоугаоника је $2a + \frac{2a}{3} = 24$,	2 бода	
одакле је $a = 9$ cm.	1 бод	
Површина квадрата је 81 cm^2.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

13. b) **први начин**		
По Питагориној теореми $13^2 - 12^2 = x^2$ (или 13,12, 5 су Питагорина три броја),	1 бод	
катета (BP) правоуглог троугла је 5 cm.	1 бод	
Површина троугла се може написати на два начина: $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$,	2 бода	
одакле је $a \cdot b = c \cdot m_c$,	1 бод	
дакле $m_c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{60}{13}$.	1 бод	
Дужина висине на хипотенузи је 4,6 cm.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

13. b) **решење на други начин**		
По Питагориној теореми $13^2 - 12^2 = x^2$ (или 13,12, 5 су Питагорина три броја),	1 бод	
катета (BP) правоуглог троугла је 5 cm.	1 бод	
По теореми катете $5 = \sqrt{13 \cdot p}$,	2 бода	
$p = \frac{25}{13} \approx 1{,}92$.	1 бод	
По Питагориној теореми $m_c{}^2 = 5^2 - \left(\frac{25}{13}\right)^2$	1 бод	
Дужина висине на хипотенузи је 4,6 cm.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

13. b) решење на трећи начин		
У правоуглом троуглу ABP означимо са α угао код темена A ,а са Q означимо подножје висине на хипотенузу AP. У правоуглом троуглу ABP је $\cos\alpha = \frac{AB}{AP} = \frac{12}{13}$.	2 бода	
$\alpha \approx 22{,}62°$.	1 бод	*Овај бод се додељује и ако касније тачно израчуна вредност* $\sin\alpha$.
У правоуглом троуглу AQB је $\sin\alpha = \frac{BQ}{AB} = \frac{BQ}{12}$.	2 бода	
$BQ = 12 \cdot \sin\alpha \approx 12 \cdot 0{,}3846 \approx 4{,}6152$.	1 бод	
Дужина висине на хипотенузи је 4,6 cm.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

14. a)		
Област дефинисаности: $\left(\text{због}\, 2x-5>0 \ и \ x>0\ \right)\, x > \frac{5}{2}$.	1 бод	*Ако ради са последичном једначином и добијене корене контролише замењивањем, бод се додељује.*
(Коришћењем идентичности логаритама) $2x-5 = \frac{x}{3}$.	2 бода	
После сређивања једначине $x = 3$.	1 бод	
Добијени корен припада области дефинисаности, значи да је то решење.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

14. b)		
$0 \le 13-2x$, па је $x \le 6{,}5$.	1 бод	*Ако ради са последичном једначином и добијене корене контролише замењивањем, затим искључи нетачни корен, бод се додељује.*
$0 \le \sqrt{13-2x} = x-5$, одатле је $5 \le x$. Дакле једначина има решење само у случају када је $5 \le x \le 6{,}5$.	1 бод	
Обе стране се дижу на квадрат: квадрат леве стране $13-2x$.	1 бод	
Квадрат десне стране: $x^2-10x+25$.	1 бод	
Једначина другог степена која се решава: $0 = x^2-8x+12$.	1 бод	
Одатле је $x=6$ или $x=2$.	1 бод	
Једино реално решење једначине које припада основном скупу је 6.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	

15. a)		
Обадве спреме има 20 особа,	1 бод	
јер је број диплома које потврђују спрему 42+28=70, што је за 20 више од броја особа (радника) који су стекли диплому.	1 бод	*Бод се даје и за цртање одговарајуће скице скупа.*
Зато је број особа који имају само техничарску спрему 22.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

15. b)		
Ако је x број радника који су млађи од 30 година,	1 бод	*Бод се даје и ако се ова мисао појави током решавања задатка.*
онда је просек: $\frac{x \cdot 148000 + (50-x) \cdot 173000}{50} = 165\,000.$	1 бод	
$x=16$	1 бод	
16 особа у лабораторији су млађе од 30 година.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

15. c)		
Плаћају се трошкови за 5 запослених.	1 бод	
Укупан број случајева: $\binom{25}{5}$,	1 бод	
број повољних случајева: $\binom{17}{5}$.	1 бод	
(Примена класичног модела вероватноће:) $\frac{\binom{17}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{6188}{53130} \approx 0{,}1165.$	1 бод	
0,12 (односно 11,65%) је вероватноћа да ће изабрати 5 жена.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

II Б

16. a)		
Дужина *c* треће странице троугла (због неједначине троугла) $20+c>22$	1 бод	
и услов неједначине $c<20+22$ треба да се задовоље.	1 бод	
Тако је $2<c<42$.	1 бод	
Ако је и трећа страница цео број, најмања вредност за *c* може бити 3, а највећа 41.	1 бод	
То значи да постоји 39 одговарајућих троуглова.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

16. b)		
(Угао који затварају две дате странице обележићемо са γ) $88=\dfrac{20\cdot 22\cdot\sin\gamma}{2}$.	1 бод	
Одатле је $\sin\gamma=0{,}4$.	1 бод	
$\gamma_1\approx 23{,}6^\circ$	1 бод	
$\gamma_2\approx 156{,}4^\circ$	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

16. c)		
У случају $\gamma_1\approx 23{,}6^\circ$ дужину треће странице (c_1) ћемо израчунати применом косинусне теореме.	1 бод	*Бод се даје и ако се ова мисао појави током решавања задатка.*
$c_1^2\approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 23{,}6^\circ$	1 бод	
$c_1^2\approx 77{,}568$,	1 бод	
и одатле је дужина $c_1\approx 8{,}8$ јединица.	1 бод	
У случају $\gamma_2\approx 156{,}4^\circ$ дужина треће странице (c_2): $c_2^2\approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 156{,}4^\circ$.	1 бод	
$c_2^2\approx 884-880\cdot(-0{,}9164)$, односно $c_2^2\approx 1690{,}4$ и одатле	1 бод	
је дужина $c_2\approx 41{,}1$ јединица.	1 бод	
Трећа страница троугла може бити дугачка $\approx 8{,}8$ јединица или $\approx 41{,}1$ јединице.	1 бод	
Укупно:	**8 бодова**	*Ако рачуна само са једним случајем, за тај део се може дати највише 4 бода.*

17. a)		
Габорова закупнина расте по геометријском низу, $a_1 = 100$ és $a_{24} = 200$.	1 бод	
$100 \cdot q^{23} = 200$, $q^{23} = 2$ (где je $q = 1 + \frac{p}{100}$)	1 бод	
$q = \sqrt[23]{2} = 2^{\frac{1}{23}} \ (\approx 1{,}0306)$	1 бод	
$p = 3{,}06$,	1 бод	
значи да Габорова закупнина расте месечно за 3,06% .	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

17. b)		
Петрова закупнина расте по аритметичком низу, $b_1 = 100$ és $b_{24} = 200$,	1 бод	
$200 = 100 + 23 \cdot d$	1 бод	
$d = \frac{100}{23} \approx 4{,}35$, месечно повећање je 4,35 талира.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

17. c)		
Збир првих 24 члана низа:	1 бод	*Бод се даје и ако се ова мисао појави током решавања задатка.*
$S_{Gábor} = 100 \cdot \frac{\left(\sqrt[23]{2}\right)^{24} - 1}{\sqrt[23]{2} - 1} \approx 3468{,}45$.	2 бода	
$S_{Péter} = \frac{100 + 200}{2} \cdot 24 = 3600$.	2 бода	
Петар за 24 месеца плаћа за 132 талери већу закупнину од Габора.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	
Посматрајући на графику месечне закупнине, види се да Петар сваког месеца плаћа већу закупнину од Габора (са изузетком 1. и 24. месеца). Зато je очигледно да би Петар за 24 месеца платио већу закупнину од Габора. За скицу јасног графика на који се надограђују тачни закључци се може дати 3 бода.		

17. d)		
Петар за првих 12 месеци плаћа закупнину од $S_{12}=\frac{2\cdot 100+11\cdot\frac{100}{23}}{2}\cdot 12\approx 1487$ талира,	1 бод	
а за других 12 месеци 2113 талир.	1 бод	
$\frac{2113}{1487}\approx 1{,}421$, дакле Петар у другој години плаћа закупнину већу за 42,1% од оне у првој години.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

18. a) први начин		
Ако занемаримо да две врсте робе не могу бити једна поред друге, онда се шест врста робе могу поређати на 6! редоследа.	1 бод	
Ако две врсте робе доспеју једна до друге, али им не разликујемо редослед, онда је могуће поређати на 5! начина.	1 бод	
Ако разликујемо и редослед ове две врсте робе, онда је шест врста робе могуће поређати на $2\cdot 5!$ начина.	1 бод	
Одговарајући број редоследа ћемо добити ако од укупног броја случајева одузмемо број оних случајева када су једно поред другог гриз и презла: $6!-2\cdot 5!$.	2 бода	*За овакав редослед мисли са мање детаља се такође дају 2 бода.*
Дакле, магационер може на 480 редоследа да поређа шест врста робе.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	*Ако не узме у обзир да наведене две врсте робе не могу да се ставе једна до друге, даје се највише 1 бод.*

18. a) решење на други начин		
Само гриз и презла могу да се поређају на $6\cdot 5$, односно 30 редоследа, ако могу да буду и једна до друге.	1 бод	
у 5 случајева две врсте робе могу да буду једна до друге, ако занемаримо редослед,	1 бод	
али пошто је редослед важан, зато је 10 случајева.	1 бод	
Тако на $(30-10=)$ 20 редоследа може да поређа две врсте робе да не буду једна до друге.	1 бод	
У свих 20 случајева остале четири врсте робе може да поређа на 4!-начина.	1 бод	
Дакле шест врста робе може да поређа на $20\cdot 4!=480$ редоследа.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

18. b)		
Наручио је укупно 325 (=176+109+40) комада хлеба и 42 комада је вратио назад,	1 бод	
што је 12,9 % од наручене количине.	1 бод	
Наручио је укупно 695 (=314+381) комада пецива и 34 комада је вратио назад,	1 бод	
што је 4,9 % од наручене количине.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

18. c)		
Број проданог пецива по појединим данима: 124; 133; 132; 122; 150 комада.	1 бод	
Два дана можемо означити на $\binom{5}{2}$ начина.	1 бод	
(3 дана је продато барем 130 комада.) На $\binom{3}{2}$ начина се могу изабрати жељена 2 дана,	1 бод	
па је тако тражена вероватноћа $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = 0{,}3$	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

18. d)		
Наручено је: од белог хлеба од 1 кг ($\frac{155}{5} =$) 31 комада, од белог хлеба од ½ кг ($\frac{95}{5} =$) 19 комада, од ражаног хлеба ($\frac{33}{5} =6{,}6$) 7 комада,	2 бода	*Два тачна одговора 1 бод,за један тачан одговор се бод не додељује.*
од земички 58 комада, и од кифли 68 комада.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	