ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2014. október 14.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon!
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek az értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)		
(Az egyenlet jobb oldalát azonosság alkalmazásával alakítva:) $2\sin x - 2\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$.	1 pont	
(Nullára rendezve:) $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$,	1 pont	
Innen $\sin x = 1$,	1 pont	
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó fokban, vegyesen, periódus nélkül vagy rossz periódussal adja meg a megoldást, vagy lehagyja a $k \in \mathbf{Z}$ feltételt.*
Ellenőrzés (behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b)		
A logaritmusfüggvény értelmezése miatt $x > 0$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldás helyességét.*
Mivel $25^{\lg x} = (5^{\lg x})^2$, ezért az egyenlet	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$(5^{\lg x})^2 - 4 \cdot 5^{\lg x} - 5 = 0$ alakban is írható.	1 pont	
(Az $5^{\lg x}$-re nézve másodfokú egyenlet megoldásai:) $5^{\lg x} = -1$ és $5^{\lg x} = 5$.	1 pont	
(Mivel $5^{\lg x} > 0$, ezért) $5^{\lg x} = -1$ nem lehetséges.	1 pont	
Ha $5^{\lg x} = 5$, akkor $x = 10$,	1 pont	
ami valóban megoldása az egyenletnek (ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. a)		
Az egy fordulattal lefestett falfelület nagysága a (festő)henger palástjának területével egyenlő.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$P = 2\cdot 2\cdot 20\cdot\pi = 80\pi$ ($\approx 251{,}3\ \text{cm}^2$)	1 pont	*Más, ésszerű és helyes kerekítéssel kapott rész-eredmények is elfogadhatók.*
$40\ \text{m}^2 = 400\,000\ \text{cm}^2$,	1 pont*	
tehát a teljes falfelület befestéséhez kb. $\frac{400\,000}{251{,}3} \approx 1592$ fordulatra van szükség a festő-hengerrel.	1 pont*	
Ennyi fordulattal kb. $1592\cdot 3 = 4776$ ml ($\approx 4{,}8$ liter) festéket viszünk fel a falra.	1 pont*	
4 liter festék megvásárlása tehát nem elegendő.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

4 liter = 4000 ml festék kb. $\frac{4000}{3} \approx 1333$ fordulatra elegendő.	1 pont	
Ennyi fordulattal kb. $1333\cdot 251{,}3 \approx 335\,000\ \text{cm}^2 =$	1 pont	
$= 33{,}5\ \text{m}^2$ felületet tudunk befesteni.	1 pont	

2. b)		
4 liter = ($4\ \text{dm}^3 =$) $4000\ \text{cm}^3$	1 pont	
$r = 8$ cm	1 pont	
$4000\ \text{cm}^3 = 8^2\cdot\pi\cdot m$	1 pont	
Ebből $m = \frac{4000}{64\pi} \approx 19{,}9$ (cm).	1 pont	
A festék tehát kb. 20 cm magasan állna a vödörben.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a)		
Ha a bolti eladásokból származó idei árbevétel b (Ft), akkor az internetes eladásokból származó árbevétel jelenleg $0{,}7b$ (Ft). ($b > 0$)	1 pont	
Ha a bevételek egyenlősége x év múlva következik be, akkor $1{,}04^x \cdot 0{,}7b = 0{,}98^x \cdot b$,	1 pont	
amiből (a pozitív b-vel való osztás után) $1{,}04^x \cdot 0{,}7 = 0{,}98^x$.	1 pont	
(Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve és a logaritmus azonosságait felhasználva:) $x\lg 1{,}04 + \lg 0{,}7 = x\lg 0{,}98$	2 pont	$0{,}7 = \left(\frac{0{,}98}{1{,}04}\right)^x \approx 0{,}9423^x$
Ebből $x = \frac{\lg 0{,}7}{\lg 0{,}98 - \lg 1{,}04}$ (≈ 6).	1 pont	$x \approx \log_{0{,}9423} 0{,}7$ (≈ 6)
A két forrásból származó árbevétel 6 év múlva lesz (körülbelül) egyenlő.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján (a bolti árbevétel $1{,}04^6 \cdot 0{,}7b \approx 0{,}886b$, az internetes árbevétel pedig $0{,}98^6 b \approx 0{,}886b$ lesz 6 év múlva).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

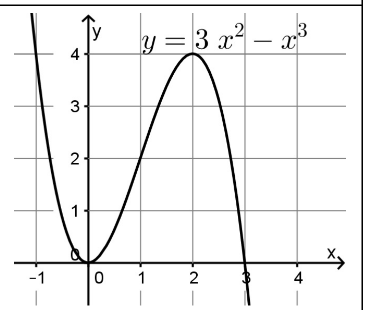
Megjegyzés: Ha a vizsgázó évről évre (ésszerű kerekítésekkel) helyesen felírja a bolti és az internetes árbevételt, és ez alapján jó választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

3. b)		
Annak a valószínűsége, hogy egy vevő reklamál: $\frac{1}{80}$, annak a valószínűsége, hogy nem reklamál: $\frac{79}{80}$.	1 pont	
P(legfeljebb 2 reklamál) = P(senki nem reklamál) + P(1 reklamál) + P(2 reklamál) =	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$= \left(\frac{79}{80}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\frac{1}{80}\right)\left(\frac{79}{80}\right)^{99} + \binom{100}{2}\left(\frac{1}{80}\right)^2\left(\frac{79}{80}\right)^{98} \approx$	3 pont	*Az összeg mindhárom tagjáért 1-1 pont jár.*
($\approx 0{,}2843 + 0{,}3598 + 0{,}2255$) $\approx 0{,}87$	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

4. a)		
$3x^2 - x^3 = x^2 \cdot (3-x)$.	1 pont	
Az x^2 tényező pozitív, mert $x \neq 0$.	1 pont	
A $3-x$ tényező is pozitív, mert $x < 3$,	1 pont	
így a két tényező szorzata is pozitív, ha $x \in]0;3[$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül vázolja a görbét, és bizonyításként az ábrára hivatkozik, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

4. b)		
(A megadott görbe az $f(x) = 3x^2 - x^3$, $x \in \mathbf{R}$ függvény grafikonja.) Ekkor $f'(x) = 6x - 3x^2$,	1 pont	
$f'(3) = -9$,	1 pont	
$f(3) = 0$.	1 pont	
Az érintő meredeksége tehát –9 (és átmegy a (3; 0) ponton).	1 pont	
Az érintő egyenlete: $y = -9x + 27$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. c)		
Az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbének az $x = 0$ és az $x = 3$ helyen van közös pontja az x tengellyel.	1 pont	
(Tudjuk, hogy ha $x \in [0;3]$, akkor $y \geq 0$, ezért) a kérdezett terület $T = \int_0^3 f(x)dx$.	1 pont	
$\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3 =$	2 pont	
$= \left(27 - \frac{81}{4}\right) - (0-0) = 6{,}75$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

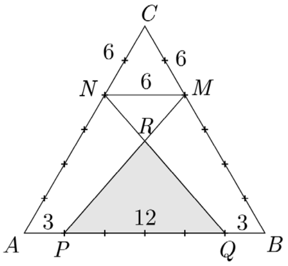
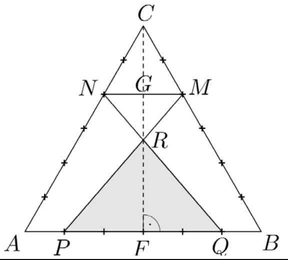
II.

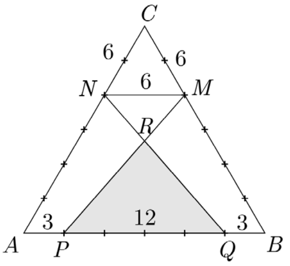
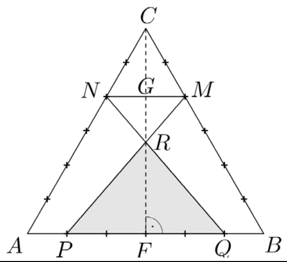
5. a)		
Az egyes játékosok sikeres dobásainak száma rendre 1, 0, 6, 2, 3, 2 és 8.	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
A csapat dobási kísérleteinek száma a mérkőzésen 50,	1 pont	
a sikeres dobások száma 22 volt.	1 pont	
A csapat dobószázaléka 44.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b)		
A két új játékos csatlakozása előtt a csapat tagjainak száma x, a tagok magasságának átlaga pedig y cm volt ($x \in \mathbf{N}$, $y > 0$).	1 pont	
(Az első új játékos belépése előtt a csapattagok magasságának összege xy volt, az új játékos belépése után $xy + 195$ lett, tehát) $\frac{xy+195}{x+1} = y + 0{,}5$.	2 pont	
Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a második új játékos belépését követően $\frac{xy+195+202}{x+2} = y + 1{,}5$.	2 pont	
Az egyenletek rendezése után a $\left.\begin{array}{l} 0{,}5x + y = 194{,}5 \\ 1{,}5x + 2y = 394 \end{array}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.	2 pont	
$x = 10$ és $y = 189{,}5$.	2 pont	
A csapat tagjainak száma 10, az átlagos magasságuk pedig 189,5 cm volt.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján. (Az első játékos csatlakozása után a csapat „összmagassága” 2090 cm lett, az átlagos magasság pedig $\frac{2090}{11} = 190$ cm. A második játékos csatlakozása után az „összmagasság” 2292 cm, az átlagos magasság pedig $\frac{2292}{12} = 191$ cm lett.)	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

6. a) **első megoldás**		
Egy megfelelő szakasz két végpontja lehet egyetlen megadott egyenesen vagy két megadott egyenesen.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Egy egyenesen 4 megfelelő szakasz jelölhető ki, a három egyenesen összesen 12 szakasz.	1 pont	
Egy adott egyenes bármelyik megadott öt pontjához 10-féleképpen választható ki egy másik egyenes egy megadott pontja.	1 pont	
Ha ezeket a szakaszokat mind megrajzoljuk, akkor összesen $3\cdot 5\cdot 10$ (= 150) szakaszt húzunk meg.	1 pont	
Ekkor azonban mindegyik szakaszt kétszer rajzoltuk volna meg, ezért a szakaszok száma valójában $\frac{3\cdot 5\cdot 10}{2}$ (= 75).	1 pont	
Összesen tehát (12 + 75 =) 87 szakasz van, amely a megadott feltételeknek megfelel.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó a kettő közül csak egy esetet vizsgált.*
Összesen:	**6 pont**	

6. a) **második megoldás**		
A megadott 15 pont összesen $\binom{15}{2}$ szakaszt határoz meg.	2 pont	
Egy-egy megadott egyenesen a nem megfelelő szakaszok száma 6,	2 pont	
tehát összesen 18 nem megfelelő szakasz van.	1 pont	
A megfelelő szakaszok száma $\binom{15}{2}-18=87$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

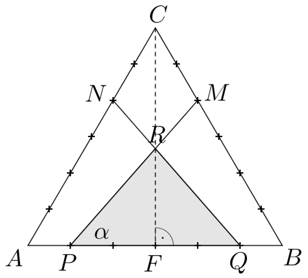
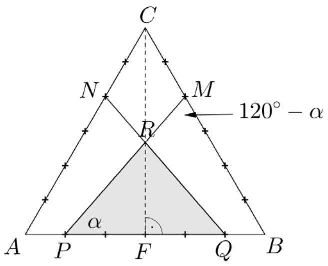
6. b) első megoldás		
 Az ábra jelöléseit használjuk. A *CNM* háromszög egy 6 egység oldalú szabályos háromszög.	2 pont	*Megrajzolja az NM szakaszt: 1 pont,* *NM = 6 egység: 1 pont.*
 A *CNM* szabályos háromszög magassága az *ABC* szabályos háromszög magasságának a harmada ($CG = \frac{1}{3} \cdot CF$):	1 pont	
$CG = \left(\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \right) 3\sqrt{3}$,	1 pont	
a *PQMN* trapéz magassága pedig ennek a kétszerese: $FG = 6\sqrt{3}$.	1 pont	
A *PQR* háromszög hasonló az *MNR* háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, illetve váltószögek).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A két háromszög hasonlóságának aránya 2 : 1,	1 pont	
így a megfelelő oldalaikhoz tartozó magasságaik aránya is ennyi.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezért $FR = 4\sqrt{3}$,	1 pont	
és a *PQR* háromszög területe $\left(\frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = \right) 24\sqrt{3}$ (területegység).	1 pont	*Ha a vizsgázó nem a pontos értéket adja meg, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.*
Összesen:	**10 pont**	

6. b) második megoldás		
 Az ábra jelöléseit használjuk. A *CNM* háromszög egy 6 egység oldalú szabályos háromszög.	2 pont	*Megrajzolja az NM szakaszt: 1 pont, NM = 6 egység: 1 pont.*
A *PQR* háromszög hasonló az *MNR* háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, illetve váltószögek).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A két háromszög hasonlóságának aránya 2 : 1,	1 pont	
ezért $PR = \frac{2}{3}PM$.	1 pont	
A *PM* szakasz a *BMP* háromszögből koszinusztétellel kifejezhető: $PM = \sqrt{15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \cos 60°} =$	1 pont	
$= \sqrt{189}$ $(= 3\sqrt{21})$.	1 pont	
$PR = \left(\frac{2}{3}PM = 2\sqrt{21} =\right) \sqrt{84}$	1 pont	
 A *PQR* háromszög *PQ* alapjához tartozó *FR* magasságát Pitagorasz-tétellel számítva: $FR = \sqrt{84 - 36} = \sqrt{48}$ $(= 4\sqrt{3})$.	1 pont*	
A *PQR* háromszög területe tehát: $\frac{PQ \cdot FR}{2} = 6 \cdot FR = 24\sqrt{3}$.	1 pont*	*Ha a vizsgázó nem a pontos értéket adja meg, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.*
Összesen:	**10 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az RPQ szöget α*-val jelölve* $\frac{\sin\alpha}{\sin 60°} = \frac{BM}{PM} = \frac{12}{3\sqrt{21}}$*, vagyis* $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}$. *(1 pont)*

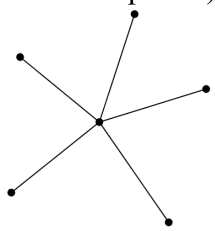
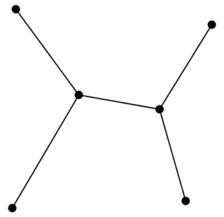
Tehát a PQR háromszög területe $\frac{PQ \cdot PR \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = 24\sqrt{3}$. *(1 pont)*

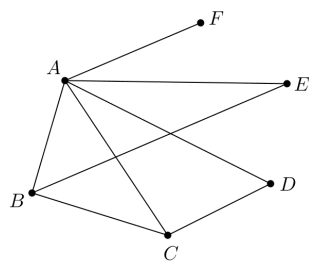
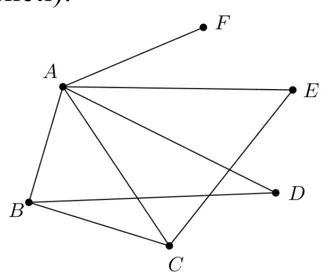
6. b) **harmadik megoldás**		
 Használjuk az ábra jelöléseit! A *PFR* derékszögű háromszögben $PF=6$ és $FR=PF\cdot \mathrm{tg}\,\alpha=6\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$,	1 pont	
a *PQR* háromszög területe pedig $\frac{PQ\cdot FR}{2}=6\cdot FR=36\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.	1 pont	
 $BMP\sphericalangle=120°-\alpha$	1 pont	
A *BMP* háromszögben a szinusztétel szerint $\frac{\sin(120°-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{PB}{MB}=\frac{15}{12}$.	1 pont	
$\sin(120°-\alpha)=\frac{5}{4}\sin\alpha$.	1 pont	
(A függvénytáblázatban is megtalálható azonosság szerint) $\sin 120°\cos\alpha-\cos 120°\sin\alpha=\frac{5}{4}\sin\alpha$.	1 pont	
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{5}{4}\sin\alpha$	1 pont	
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{3}{4}\sin\alpha$	1 pont	
$\frac{2\sqrt{3}}{3}=\mathrm{tg}\,\alpha$	1 pont	
A *PQR* háromszög területe tehát $36\cdot \mathrm{tg}\,\alpha=36\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=24\sqrt{3}$.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem a pontos értéket adja meg, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.*
Összesen:	**10 pont**	

7. a)		
(Az ábra jelölését használva) a téglatest méretei méterben: x, $1 - x$, $1 - 2x$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
a téglatest térfogata m^3-ben: $x(1-x)(1-2x)$ (ahol $0 < x < 0{,}5$).	1 pont	
Keressük a (V: $]0; 0{,}5[\to \mathbf{R}$) $V(x) = x(1-x)(1-2x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ függvény maximumát.	1 pont	
$V'(x) = 6x^2 - 6x + 1$.	1 pont	
(A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy) $V'(x) = 0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet (valós) megoldásai: $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ ($\approx 0{,}211$) és $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ ($\approx 0{,}789$).	2 pont	
Ez utóbbi nem eleme a V értelmezési tartományának, ezért ez nem jöhet szóba.	1 pont	
A V' függvény a $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ ($\approx 0{,}211$) helyen előjelet vált (pozitívból negatívba megy át), ezért ez a V függvénynek az egyetlen szélsőértékhelye, mégpedig a maximumhelye.	1 pont	*Második derivált:* $V''(x) = 12x - 6 = 6(2x-1)$, *ez negatív a V teljes értelmezési tartományán. Ezért V-nek maximuma van.*
A maximális térfogatú doboz méretei (a kért kerekítéssel): 21, 79 és 58 (cm).	2 pont	*Ha a vizsgázó válaszában nem kerekít, vagy rosszul kerekít, akkor ezért 1 pontot veszítsen.*
Összesen:	**11 pont**	

7. b)		
Az ötkarakteres kódban $\binom{5}{2} - 4$ (= 6) különböző módon lehet a két számjegy helyét kijelölni.	2 pont	*A két szám és a három betű helyét hatféleképpen lehet megadni (s = szám, b = betű): sbsbb, sbbsb, sbbbs, bsbsb, bsbbs, bbsbs*
A két helyre $10 \cdot 10$ (= 100) különböző módon lehet két számjegyet választani úgy, hogy a sorrendjük is számít,	1 pont	
a másik három helyre pedig 26^3 (= 17 576) különböző módon három nagybetűt.	1 pont	
A különböző kódok száma tehát $(6 \cdot 100 \cdot 17\,576 =)$ 10 545 600.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a két számjegy helyének meghatározásakor nem veszi figyelembe, hogy ezek nem lehetnek egymás mellett, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

8. a)		
Az I. állítás igaz. Megfelelő konstrukció (lásd az alábbi két példát) vagy szöveges indoklás.  	2 pont	*Nem bontható.*
A II. állításra ellenpélda az a hétpontú gráf, amelynek van egy hatpontú teljes részgráfja és egy izolált pontja.	2 pont	
A II. állítás tehát hamis.	1 pont	
A n pontú fagráfnak $n-1$ éle van,	1 pont	
ezért a csúcsok és az élek számának összege $2n-1$, ami páratlan.	1 pont	
A III. állítás tehát hamis.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. b)		
(Ha az ismeretségek száma rendre *a*, *b*, *c*, *d*, *e* és *f*, akkor $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f =$) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.	1 pont	
Mivel az ismeretségi gráfban a pontok fokszáma legfeljebb 5 (és $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f$),	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért a csúcsok fokszámai a következők lehetnek (az ismeretségek számát a névsornak megfelelően rendezve): 5, 3, 3, 2, 2, 1	1 pont	
vagy 5, 4, 3, 3, 1, 1.	1 pont	
A második esethez nem tartozik gráf,	1 pont	
mert nincs olyan gráf, amelyben a páratlan fokszámú csúcsok száma páratlan.	1 pont	*Ha a hatpontú egyszerű gráfban van ötödfokú pont és két elsőfokú pont, akkor a gráfban nem lehet negyedfokú pont is.*
Két lehetséges ismeretségi gráf van (például azért, mert *B*-nek és *C*-nek is van ismerőse *D* és *E* között, ezért *D* és *E* nem ismerheti egymást, így *D* az *A*-n kívül vagy *C*-t vagy *B*-t ismerheti):  	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	

9. a)		
$a_{17} = 91$ és $a_{33} = 11$	1 pont	
Ebből $d = -5$,	1 pont	
majd $a_1 = 171$.	1 pont	
$S_{49} = \frac{[2 \cdot 171 + (49-1)\cdot(-5)]\cdot 49}{2} =$	1 pont	
$= 2499$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) első megoldás		
Az egyes sorok elején rendre a sorozat 1., 8., 15., 22., 29., 36., illetve 43. tagja áll.	1 pont	
Minden egyes oszlopból csak egy szám választható, ez a kiválasztott szám a saját sorának elején álló számból vagy $0d$, vagy $1d$, vagy $2d$, …, vagy $6d$ hozzáadásával keletkezik, és e hét lehetőség mindegyike pontosan egyszer fordul elő.	1 pont	
Ha tehát összeadjuk a táblázatból kiválasztott hét számot, akkor az összegben megjelenik a sorok elején álló hét szám összege,	1 pont	
továbbá (valamilyen sorrendben) a $0d$, $1d$, $2d$, …, $6d$ számok összege (ami $21d$-vel egyenlő) is.	1 pont	
Ezért a hét kiválasztott szám összege $a_1 + a_8 + a_{15} + a_{22} + a_{29} + a_{36} + a_{43} + 21d$,	1 pont	
ami valóban minden kiválasztás esetében ugyanannyi (357).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó legalább két különböző konkrét kiválasztás esetén megállapítja, hogy az összeg 357, akkor ezért a megállapításáért 1 pontot kapjon.

9. b) **második megoldás**		
Adjuk össze a sorozat főátlóban álló tagjait! (Ezek összege 357.)	1 pont	
Ha a táblázat két kiválasztott sorában felcseréljük, hogy melyik sorban melyik oszlopból választottuk ki a sorozat tagját,	1 pont	
akkor – ha a két érintett oszlop sorszáma között k a különbség – az egyik oszlopban $k \cdot d$-vel nő, a másik oszlopban $k \cdot d$-vel csökken a kiválasztott tag értéke.	2 pont	
Tehát a sorozat hét kiválasztott tagjának az összege a két tag cseréje után ugyanannyi marad, mint amennyi a csere előtt volt.	1 pont	
Mivel a sorozat főátlóban álló tagjaiból kiindulva, két-két tag cserélgetésével bármelyik kiválasztott számheteshez eljuthatunk, a tagok összege bármely hét tag (leírtak szerinti) kiválasztása esetén ugyanannyi (357).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. c)		
Péter összesen 7! = 5040-féleképpen választhat ki a táblázatból számokat a megadott szabály szerint.	1 pont	
Ha a 91 és a 11 is a kiválasztott számok közt van, akkor az első sorból 5-féleképpen választhat, ezután a másodikból 4-féleképpen, a negyedikből 3-féleképpen, a hatodikból 2-féleképpen, a hetedikből pedig 1-féleképpen.	1 pont	
Ez 5! = 120 lehetőség.	1 pont	
A kérdéses valószínűség így $\frac{120}{5040} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}024$.	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	