

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2014. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésztre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)		
$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont	
Azaz $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).	2 pont	<i>Ha a vizsgázó a periódust nem osztja 2-vel, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.</i>
Ellenőrzés.	1 pont	<i>Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó egy perióduson belül behelyettesítéssel ellenőriz, vagy az átalakítások ekvivalenciájára hivatkozik.</i>
Összesen:	5 pont	

Megjegyzések:

- Ha a $k \in \mathbf{Z}$ feltétel sehol nem szerepel, akkor összesen legfeljebb 4 pont adható.*
- Ha a vizsgázó fokokban számol, akkor összesen legfeljebb 3 pontot kaphat.*
- Ha a vizsgázó sehol nem ír periódust, akkor összesen legfeljebb 2 pontot kaphat (1 pont az $x = \frac{\pi}{3}$ -ért, 1 pont az ellenőrzésért).*

1. b)		
A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha $x > 0$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldást.</i>
$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} =$	1 pont	
$= \frac{\log_3 x}{2}$	1 pont	
Az eredeti egyenletből ezzel ($\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} = 6$, azaz) $\log_3 x = 4$.	1 pont	
Tehát $x = 81$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	<i>Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőrzi, vagy az átalakítások ekvivalenciájára hivatkozik.</i>
Összesen:	6 pont	

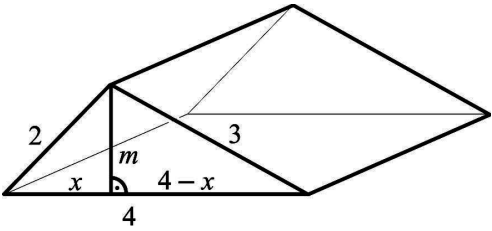
2. a) első megoldás		
A 16 pontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{16}{2} (=120)$.	1 pont	
A feladat feltételei szerint a piros élek száma: $\frac{16 \cdot 3}{2} (=24)$.	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
(Két pont véletlenszerű kiválasztása ekvivalens egy él véletlenszerű kiválasztásával.) Így annak a valószínűsége, hogy éppen piros élt választottunk: $p = \frac{24}{120} \left(= \frac{1}{5} = 0,2 \right)$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

2. a) második megoldás		
(A gráf pontjai egyenértékűek, ezért) tekintsük a két kiválasztott pont közül az egyiket.	1 pont	
Ebből összesen 15 él indul ki,	1 pont	
melyek közül 3 piros.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a másik kiválasztott pontba éppen piros él indul: $p = \frac{3}{15} \left(= \frac{1}{5} = 0,2 \right)$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

2. b)		
Az n pontú fagráf éleinek száma $n - 1$.	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ezeket az összefüggéseket a feladat feltételeinek megfelelően helyesen alkalmazza.</i>
Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.	1 pont	
A feladat szövege szerint ekkor $\frac{n(n-1)}{2} - 45 = n - 1$,	1 pont	
ahonnan $n^2 - 3n - 88 = 0$.	1 pont	
Megoldva: $n = 11$ vagy $n = -8$.	1 pont	
(Mivel n pozitív egész, ezért) $n = -8$ nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
A gráfnak 11 pontja van.	1 pont	
Ellenőrzés: A 11 pontú teljes gráf 55 élű, a 11 pontú fagráf 10 élű, ezért az $55 - 45 = 10$ egyenlőség miatt ez valóban megoldás.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

3.		
A bronzplasztika akkor fér bele a dobozba, ha a magassága (m) nem haladja meg az 1,5 cm-t.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A háromszög α szögére felírva a koszinusztételt: $3^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$.	1 pont*	
Ebből $\cos \alpha = \frac{11}{16}$ ($= 0,6875$),	1 pont*	
$\alpha \approx 46,57^\circ$.	1 pont*	
A háromszög 4 cm-es oldalához tartozó magasságának kiszámítása: $\sin 46,57^\circ = \frac{m}{2}$.	1 pont*	
Ebből $m \approx 1,45$ (cm).	1 pont*	
1,45 cm < 1,5 cm, tehát a bronzplasztika belefér a dobozba.	1 pont	
A testet az egyik háromszöglapjára állítva egy olyan háromszög alapú egyenes hasábot kapunk, amelynek magassága $M = 4$ (cm),	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
térfogata pedig $V = T \cdot M \approx \frac{4 \cdot 1,45}{2} \cdot 4 =$	1 pont	
$= 11,6 \text{ cm}^3 =$	1 pont	
$= 0,0116 \text{ dm}^3$.	1 pont	
Az emléktárgy tömege $0,0116 \cdot 8,2 = 0,09512$ (kg).	1 pont	
Ez kb. 9,5 dkg, tehát valóban nem haladja meg a 10 dkg-ot.	1 pont	
Összesen:	14 pont	

Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetek bármelyikéért is megkaphatja a vizsgázó:

		
<p>(A háromszöglapot az m magasság két derékszögű háromszögre bontja. Ezekre felírva a Pitagorasztételt:)</p> $m^2 + x^2 = 2^2,$	1 pont	
$m^2 + (4-x)^2 = 3^2.$	1 pont	
<p>A második egyenletből zárójelfelbontás és rendezés után kapjuk: $m^2 = -7 + 8x - x^2$.</p>	1 pont	
<p>Ezt az első egyenletbe behelyettesítve és rendezve kapjuk: $x = \frac{11}{8}$.</p>	1 pont	
<p>Visszahelyettesítve: $m \left(= \frac{3\sqrt{15}}{8} \right) \approx 1,45$ (cm).</p>	1 pont	

<p>(A háromszög három oldalából Héron-képlettel kiszámolható a háromszög területe.) A kerület fele: $s = 4,5$.</p>	1 pont	
<p>Így $T = \sqrt{4,5 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5} \approx$</p>	1 pont	
<p>$\approx 2,9$ (cm²).</p>	1 pont	
<p>Ebből egy másik területképlettel a háromszög magassága kiszámolható: $2,9 \approx \frac{4m}{2}$.</p>	1 pont	
<p>$m \approx 1,45$ (cm)</p>	1 pont	

4. a)		
Ha x -szel jelöljük az ismeretlen hetedik adatot, akkor a hét adat átlaga: $\frac{25+x}{7}$.	1 pont	
A módusz értéke bármely x érték esetén 2.	1 pont	
A medián értéke háromféle lehet az ismeretlen adat értékétől függően: I. Ha x értéke 3-nál kisebb (1 vagy 2), akkor a medián értéke 2.	1 pont	
Ez nem lehetséges, mert a módusz is 2, így a sorozat nem lenne szigorúan monoton növekvő.	1 pont	
II. Ha x értéke 3, akkor a medián értéke is 3, az átlag pedig 4.	1 pont	
Mivel a 2; 3; 4 számok (szigorúan monoton növekvő) számtani sorozatot alkotnak, ezért az $x = 3$ megoldása a feladatnak.	1 pont	
III. Ha x értéke 3-nál nagyobb, akkor a medián értéke 4, az átlag pedig nagyobb, mint 4.	1 pont	
Ekkor a három tag növekvő sorrendje: 2; 4; $\frac{25+x}{7}$.	1 pont	
Ezek számtani sorozatot alkotnak, ha $\frac{25+x}{7} = 6$, azaz $x = 17$.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

4. b)		
Mivel páros számokat képezünk, a szám csak 0-ra, 2-re vagy 4-re végződhet.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha a szám 0-ra végződik, akkor az első három helyiértéken rendre 5, 4, illetve 3 választási lehetőségünk van, ilyen számból tehát $5 \cdot 4 \cdot 3 (= 60)$ darab van.	1 pont	
Ha a szám 2-re vagy 4-re végződik, akkor az első három helyiértéken (mivel 0-val nem kezdődhet szám) rendre 4, 4, illetve 3 választási lehetőségünk van, ilyen számból tehát $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 (= 96)$ darab van.	2 pont	
Azaz összesen 156, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

II.

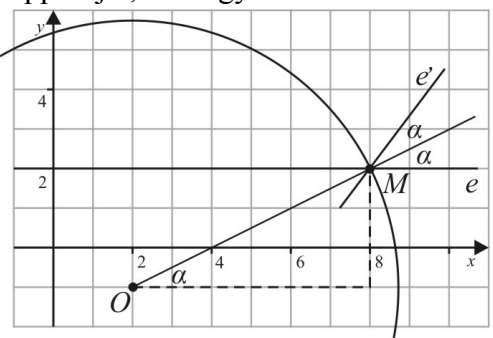
5. a)		
Ha n jelöli a részlegben dolgozó nők, f pedig a férfiak számát, akkor a feltétel alapján a nők életkorának összege $40n$, a férfiak életkorának összege pedig $44f$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A szöveg szerint $\frac{40n + 44f}{n + f} = 41,5$.	2 pont	
Ebből kapjuk, hogy $f = 0,6n$.	2 pont	
Azaz 0,6-szer annyi férfi dolgozik ebben a részlegben, mint nő.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

5. b)		
Az átszervezés után a feltétel alapján: $\frac{f - 7}{n - 9} = \frac{1}{2}$.	1 pont	
Az eredeti létszámmra vonatkozóan $n = 1,5f$. Ezt beírva a fenti egyenletbe: $\frac{f - 7}{1,5f - 9} = \frac{1}{2}$.	1 pont	
Innen $f = 10$,	1 pont	
majd visszahelyettesítve $n = 15$ adódik.	1 pont	
Az átszervezés után $(15 - 9 =)$ 6 nő és $(10 - 7 =)$ 3 férfi maradt a részlegben.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. c) első megoldás		
Az első munkacsoport tagjainak kiválasztására a lehetőségek száma: $\binom{6}{2} \cdot \binom{3}{1} (= 45)$.	1 pont	
A második csoport kiválasztási lehetőségeinek száma: $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} (= 12)$.	1 pont	
Az első két csoport kiválasztása után a harmadik csoport már egyértelmű.	1 pont	
Az összes lehetőségek száma (a csoportok sorrendjét is figyelembe véve) a fentiek szorzata: $\binom{6}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} (= 540)$.	1 pont	
Mivel azonban a csoportok sorrendje nem számít, ezért a lehetőségek száma $\frac{540}{3!} = 90$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. c) második megoldás		
Legyen a három férfi A , B és C .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A csoportjába $\binom{6}{2} (= 15)$ -féleképpen választhatunk két nőt.	1 pont	
B csoportjába a négy megmaradt nő közül $\binom{4}{2} (= 6)$ -féleképpen választhatunk kettőt.	1 pont	
C csoportjába kerül a megmaradt két nő.	1 pont	
Összesen tehát $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 90$ lehetőség van a három fős csoportok létrehozására.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. c) harmadik megoldás		
A nők három csoportba osztására a lehetőségek száma (a csoportok sorrendjét is figyelembe véve): $\frac{6!}{(2!)^3} (= 90)$.	2 pont	
Mivel azonban a csoportok sorrendje nem számít, ezért a lehetőségek száma $\frac{90}{3!} (= 15)$.	1 pont	
A nők által létrehozott három csoporthoz az egy-egy férfi $3! (= 6)$ -féleképpen csatlakozhat.	1 pont	
Az összes lehetőségek száma a fentiek szorzata: $15 \cdot 3! = 90$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

6. a) első megoldás		
Jó ábra (amelyen a vizsgázó jól tünteti fel a kör középpontját, az e egyenest és a tükrözést).		
	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
A kör középpontja $O(2; -1)$.	1 pont	
A kör egyenletébe $y = 2$ -t helyettesítve az $(x - 2)^2 = 36$ egyenletet kapjuk,	1 pont	
aminek pozitív megoldása $x = 8$, így az M pont koordinátái $(8; 2)$.	1 pont	
Az OM egyenes irányvektora $(6; 3)$,	1 pont	
így meredeksége (irányszögének tangense) $\frac{3}{6} \left(= \frac{1}{2} \right)$.	1 pont	
Ha az OM egyenes irányszöge α , akkor a tükrözés miatt a tükörkép egyenesének irányszöge 2α .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A tükörkép egyenesének meredeksége így $\text{tg } 2\alpha = \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} =$	1 pont	$\alpha \approx 26,565^\circ$ $2\alpha \approx 53,13^\circ$
$= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.	1 pont	$\text{tg } 2\alpha \approx 1,333$
Az $y = mx + b$ egyenes egyenletbe behelyettesítve az M pont koordinátáit és a tükörkép egyenes meredekségét $(2 = \frac{4}{3} \cdot 8 + b)$ kapjuk, hogy $b = -\frac{26}{3}$.	2 pont	$b \approx -8,664$
A tükörkép egyenes egyenlete $y = \frac{4}{3}x - \frac{26}{3}$.	1 pont	$y = 1,333x - 8,664$
Összesen:	12 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó közelítő értékekkel és helyes kerekítést alkalmazva jól írja fel az egyenes egyenletét, akkor teljes pontszámot kaphat.

6. a) második megoldás		
Jó ábra (amelyen a vizsgázó jól tünteti fel a kör középpontját, az e egyenest és a tükrözést).		
	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
A kör középpontja $O(2; -1)$.	1 pont	
A kör egyenletébe $y = 2$ -t helyettesítve az $(x - 2)^2 = 36$ egyenletet kapjuk,	1 pont	
aminek pozitív megoldása $x = 8$, így $M(8; 2)$.	1 pont	
Az OM egyenes irányvektora $(6; 3)$,	1 pont	
így egyenlete $x - 2y = 4$.	1 pont	
Az e egyenes egy tetszőleges A pontjának OM egyenesre vett tükörképe legyen B . Az e egyenes OM egyenesre vett tükörképe ekkor a BM egyenes lesz.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az $y = 2$ egyenesen ezért kiválasztunk egy tetszőleges pontot, koordinátái legyenek például $A(3; 2)$. Az OM egyenesre merőlegest állítunk az A pontban, ennek egyenlete $2x + y = 8$.	1 pont	
Kiszámoljuk ennek és az OM egyenesnek az F metszéspontját, azaz megoldjuk a következő egyenletrendszert:	1 pont	
$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$		
Ennek megoldása $x = 4$ és $y = 0$, így $F(4; 0)$.	1 pont	
Az A pont F -re vonatkozó tükörképe $B(5; -2)$.	1 pont	
Az M és B pontokon áthaladó egyenes egyenlete $-4x + 3y = -26$.	1 pont	
Összesen:	12 pont	

6. b)		
A parabola egyenletébe $y = 2$ -t helyettesítve kapjuk, hogy az egyenes a parabolát az első síknegyedben a $P(3; 2)$ pontban metszi.	1 pont	
A keresett egyenes a parabolához a $P(3; 2)$ pontba húzott érintő, amelynek meredeksége az $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x + 5$ függvény deriváltfüggvényének az $x = 3$ helyen felvett értéke.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$f'(x) = -2x + 2$,	1 pont	
a keresett meredekség így $m = f'(3) = -4$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

7. a)		
$(x = 1$ -et és $x = -1$ -et behelyettesítve) $1 + a + b + c = -1 + a - b + c + 4,$	2 pont	
ahonnan kapjuk, hogy $b = 1.$	1 pont	
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1,$	2 pont	
$f'(3) = 27 + 6a + 1 = 10.$	1 pont	
Ebből $a = -3.$	1 pont	
$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + x + c) dx =$ $= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + cx \right]_0^2 =$	2 pont	
$= 4 - 8 + 2 + 2c.$	1 pont	
(A feltétel alapján) $4 - 8 + 2 + 2c = -8,$ ahonnan kapjuk, hogy $c = -3.$	1 pont	
Összesen:	11 pont	

7. b)		
$x^3 - 3x^2 + x - 3 = x^2 \cdot (x - 3) + x - 3 =$	1 pont	
$= (x - 3) \cdot (x^2 + 1)$	1 pont	
$g(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 1) = 0$	1 pont	
(Egy szorzat értéke pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla,) így $x = 3.$	1 pont	
Mivel $x^2 + 1 > 0$ bármilyen valós x esetén, így más zérushelye nincs a függvénynek.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

8. a) első megoldás		
Összesen $\binom{32}{2}$ (= 496)-féleképpen lehet 2 lapot kiválasztani.	1 pont	
A különböző színű lappárok (azaz a kedvező esetek) száma: $\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1}$ (= 384)	2 pont	
A keresett valószínűség: $p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{384}{496} \left(= \frac{24}{31} \right) \approx 0,774.$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

8. a) második megoldás		
Képzeld el úgy az osztást, hogy először a talonba teszünk egymás után két lapot!	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A talonba kerülő első lap bármelyik lehet.	1 pont	
A másodikra kihúzható 31 lap közül 24-nek a színe különbözik az első kihúzott lap színétől.	1 pont	
A keresett valószínűség: $p = \frac{24}{31} \approx 0,774.$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

8. b)		
Elemér összesen $\binom{32}{10}$ -féleképpen kaphat 10 lapot.	1 pont	
(Mivel négyféle szín van és minden esetben a maradék 24 lapból kell választanunk még két lapot, ezért) a kedvező esetek száma: $4 \cdot \binom{8}{8} \cdot \binom{24}{2} = 4 \cdot \binom{24}{2}.$	2 pont	$\binom{8}{8} \cdot \binom{24}{2}$ <i>részeredmény esetén 1 pont jár.</i>
A keresett valószínűség: $p = \frac{4 \cdot \binom{24}{2}}{\binom{32}{10}} = \frac{1104}{64\,512\,240} \approx 0,000017.$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

8. c)		
(Jelölje A azt eseményt, hogy van Fanninál ász. Az A esemény valószínűségét komplementer módszerrel számoljuk ki.) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) =$	1 pont	
$= 1 - \frac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}} =$	1 pont	
$= 1 - \frac{13\,123\,110}{64\,512\,240} \approx 0,7966$ annak az esélye, hogy van ász Fanni kezében.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

8. d)		
(Jelölje B azt az eseményt, hogy mind a négy ász Fanninhoz került, A pedig azt, hogy van nála ász.) A feltételes valószínűség definíciója szerint $P(B A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
(Ha minden ász Fanninál van, akkor van nála ász, ezért) $P(BA) = P(B)$.	1 pont	
A négy ász $\binom{4}{4}\binom{28}{6}$ -féleképpen kerülhet Fanninhoz,	1 pont	
ezért $P(B) = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \frac{376\,740}{64\,512\,240} \approx 0,00584$.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség: $P(B A) \approx \frac{0,00584}{0,7966} \approx 0,00733$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzések:

- A közösleges tört alakban, a tizedestört alakban és a százalékban megadott helyes válaszok is elfogadhatók.*
- Más, ésszerű és helyes kerekítéssel kapott válaszok is elfogadhatók.*

9.		
Ha Rita pontszáma játékról játékra k -szorosára, Péter pontszáma pedig játékról játékra n -szeresére nőtt ($n > k > 1$), akkor (a kezdő pontszámot x -szel jelölve) Rita pontszámai fordulóról fordulóra $x; kx; k^2x; k^3x$, míg Péter pontszámai fordulóról fordulóra $x; nx; n^2x; n^3x$.	2 pont	
A pontszámkülönbségek fordulóról fordulóra: $nx - kx = 20$; $n^2x - k^2x = 70$; $n^3x - k^3x = 185$.	2 pont	
$x(n - k) = 20$ és $x(n^2 - k^2) = x(n - k)(n + k) =$	1 pont	
$= 20(n + k) = 70$.	1 pont	
Ez alapján $n + k = 3,5$, tehát $k = 3,5 - n$.	1 pont	
$x(n^3 - k^3) = x(n - k)(n^2 + nk + k^2) = 185$	1 pont	
Az egyenletbe az előzőeket behelyettesítve: $20 \cdot [(n^2 + n(3,5 - n) + (3,5 - n)^2)] = 185$.	1 pont	
Rendezve: $2n^2 - 7n + 6 = 0$.	2 pont	
Ennek a gyökei $n_1 = 2$ és $n_2 = 1,5$.	1 pont	
($n + k = 3,5$ miatt) $k_1 = 1,5$ és $k_2 = 2$.	1 pont	
($n > k$ miatt) csak $n = 2$ és $k = 1,5$ a megoldás.	1 pont	
A kezdő pontszám értéke $\left(x = \frac{20}{n - k} = \frac{20}{0,5} = \right) 40$ volt.	1 pont	
Ellenőrzés: Rita pontszámai rendre 40, 60, 90 és 135; Péter pontszámai rendre 40, 80, 160 és 320; a kettő közti különbség fordulóról fordulóra 0, 20, 70 és 185.	1 pont	
Összesen:	16 pont	