

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2014. május 6.**

# **MATEMATIKA**

## **KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

## **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

## I.

<b>1.</b>		
15 fiú van az osztályban.	2 pont	<i>Ha tudja, hogy a 35-öt hét egyenlő részre kell osztani, akkor 1 pontot kap.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>2.</b>		
$x = 1$	2 pont	<i>Ha tudja, hogy <math>\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}</math>, akkor 1 pontot kap.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>3.</b>		
a) A (0; 4) pontban vagy $(y=)4$ -nél.	1 pont	<i>Ha a grafikonról olvassa le a vizsgázó, akkor is jár ez a 2 pont.</i>
b) $-2x + 4 = 6$	1 pont	
$x = -1$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4.</b>		
A dolgozatot ( $3^3 =$ )27 tanuló írta meg.	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>5.</b>		
A foksámok összege: 14.	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>6.</b>		
$5 - x \geq 0$	1 pont	
$(0 \leq) x \leq 5, (x \in \mathbf{Z})$	1 pont	
$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>7.</b>		
A $270^\circ$ a $360^\circ$ -nak $\frac{3}{4}$ -e.	1 pont	<i>Ha a vizsgázó <math>\pi</math> értékét jól kerekítve használja, akkor ez a 2 pont jár.</i>
A kör területe $3^2 \cdot \pi (\approx 28,27 \text{ cm}^2)$ .	1 pont	
A körcikk területe: $\frac{27}{4} \cdot \pi (\approx 21,2) \text{ cm}^2$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>8.</b>						2 pont	<i>Az adatok más formában (tört, %) történő helyes megadása esetén is jár a 2 pont. 1 hibás érték esetén 1 pont, 1-nél több hiba esetén nem jár pont.</i>
osztályzat	1	2	3	4	5		
relatív gyakoriság	0	0,1	0,35	0,4	0,15		
<b>Összesen:</b>						<b>2 pont</b>	

<b>9.</b>		
A) igaz	1 pont	
B) hamis	1 pont	
C) igaz	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>3 pont</b>

<b>10.</b>		
A gömb sugara a kocka testátlójának fele.	1 pont	<i>Ha csak a számolásból látszik ez a gondolat, akkor is jár az 1 pont.</i>
A kocka testátlójának hossza: $7 \cdot \sqrt{3} (\approx 12,1)$	1 pont	<i>Ha megfelelő közelítő értéket használ, jár az 1 pont.</i>
A gömb sugara tehát $\frac{7 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 6,1$	1 pont	<i>Ha nem jól kerekít, ez a pont nem jár.</i>
<b>Összesen:</b>		<b>3 pont</b>

<b>11.</b>		
B)	2 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>12.</b>		
(Az AC átló felezi a BCD szöget.) Az ACD szög 60°-os,	1 pont	<i>A feladat szövegének megfelelő jó ábráért 1 pont jár.</i>
és ACD háromszög egyenlőszárú, vagyis a háromszög szabályos.	1 pont	
A keresett átló hossza ezért 6 cm.	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>3 pont</b>

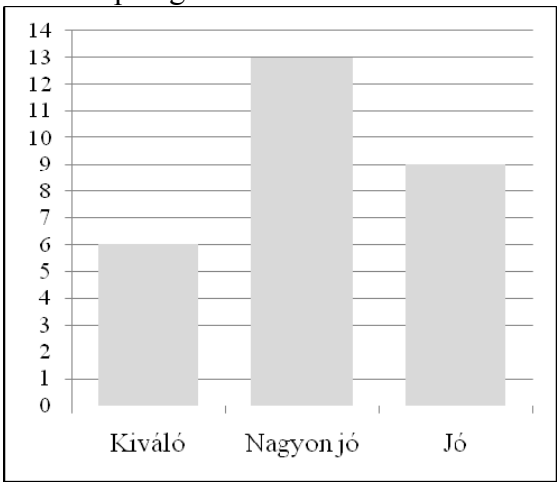
## II. A

<b>13. a)</b>		
Értelmezési tartomány: $x > 0$ .	1 pont	<i>Ha a vizsgázó nem vizsgálja az értelmezési tartományt, de a gyök helyességéről pl. behelyettesítéssel meggyőződik, akkor ezt a pontot is megkapja.</i>
A logaritmus megfelelő azonosságának helyes alkalmazása.	1 pont	
(A logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű.) $\frac{7x+18}{x} = 9$ (vagy $7x+18 = 9x$ )	1 pont	
$x = 9$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az $x > 0$ feltétel felírása mellett az ekvivalens átalakításokra való hivatkozás.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>13. b)</b>		
$a = \cos x$ (ahol $-1 \leq a \leq 1$ ) helyettesítéssel: $2a^2 - 7a - 4 = 0$ .	1 pont	<i>Az új változó bevezetése nélkül is jár a pont az egyenlet helyes átrendezése esetén.</i>
Az egyenlet gyökei $a_1 = 4$ ,	1 pont	
és $a_2 = -\frac{1}{2}$ .	1 pont	
Az $a = \cos x = 4$ nem ad megoldást, (mert $\cos x \leq 1$ .)	1 pont	
A $\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai $[0; 2\pi]$ -n: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ ,	1 pont*	<i>Ha a vizsgázó az egyenlet mindkét gyökét helyesen adja meg fokban (<math>x_1 = 120^\circ</math> és <math>x_2 = 240^\circ</math>), akkor 1 pontot kap.</i>
$x_2 = \frac{4\pi}{3}$ .	1 pont*	
Ellenőrzés (például behelyettesítéssel).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

*Az egyenlet gyökeinek helyes felírása, de a megadott alaphalmaz figyelmen kívül hagyása (például végtelen sok gyök vagy negatív gyök megadása) esetén a két, \*-gal jelölt pontból csak 1 pont adható.*

<b>14. a)</b>		
Az adatok átlaga: $\frac{83 \cdot 2 + 76 \cdot 4 + 69 \cdot 2 + \dots + 58 \cdot 4 + 56 \cdot 4 + 55}{28} =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
$= \frac{1816}{28} \approx 64,86.$	1 pont	
Mivel az adatok száma páros, ezért a medián a nagyság szerint sorba rendezett adatok közül a két középső számtani közepe:	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
$\frac{61 + 65}{2} = 63.$	1 pont	
A válasz: igen, az átlag és a medián legalább 1 ponttal eltér egymástól.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>14. b)</b>		
„Kiváló” minősítést érdemel 6 osztály, „Nagyon jó”-t 13, „Jó” minősítést kap 9 osztály.	2 pont	<i>Két jól számolt adat esetén 1 pont, ez alatt 0 pont jár.</i>
Az oszlopdiagram: 	2 pont	<i>Minden elvileg helyes ábrázolás (pl.: a tengelyek felcserélése, összeérő oszlopok) is elfogadható. A 2 pont a függőleges tengely skálája (1), az egyes oszlopok megfelelő azonosíthatósága (2) és a megfelelő adatok ábrázolása (3) esetén jár. Ha ezek közül csak valamelyik kettő megfelelő, akkor 1 pont, ez alatt 0 pont jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>14. c) első megoldás</b>		
A kedvező esetek száma: $2 \cdot 4 (= 8)$ .	1 pont	
Az összes eset száma: $6 \cdot 5 (= 30)$ .	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $P = \frac{8}{30} (= 0,2\dot{6})$ .	1 pont	<i>A választ bármilyen helyes kerekítéssel vagy százalékos alakban is el kell fogadni.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

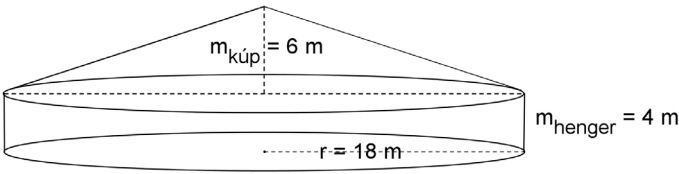
<b>14. c) második megoldás</b>		
Annak valószínűsége, hogy legfelül 83 pontos dolgozat fekszik: $\frac{2}{6}$ .	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy alatta 76 pontos dolgozat fekszik: $\frac{4}{5}$ .	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $P = \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5}\right) \frac{8}{30} (=0,26)$ .	1 pont	<i>A választ bármilyen helyes kerekítéssel vagy százalékos alakban is el kell fogadni.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>15. a)</b>		
A kérdéses távolság: $d_{AB} = \sqrt{(8-12)^2 + (9-1)^2} =$	1 pont	<i>A képletért (behelyettesítés nélkül) nem jár pont.</i>
$= \sqrt{80} (\approx 8,944)$ (egység).	1 pont	<i>Ha a pontos érték nem szerepel és rosszul kerekít a vizsgázó, akkor a második pont nem jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>15. b)</b>		
Az egyenes egy normálvektora az $\mathbf{n}_e(4;3)$ vektor.	1 pont	
Ezzel az egyenes egyenlete: $4x + 3y = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3,$	1 pont	
azaz $4x + 3y = 25$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>15. c)</b>		
Az $f$ egyenes egy irányvektora az $\overrightarrow{AB}(4;-8)$ vektor.	1 pont	
Ezzel az egyenes egyenlete: $-8x - 4y = (-8) \cdot 8 - 4 \cdot 9$ .	1 pont	
Az $f$ egyenes egyenlete: $2x + y = 25$ .	1 pont	
(A metszéspont koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldása adja:) $\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 25 \\ 2x + y = 25 \end{array} \right\}$	1 pont	<i>Ha a vizsgázó a metszéspont koordinátáit a helyes grafikonról jól olvassa le, akkor 1 pontot kap. Ha mindkét egyenes egyenletébe történő behelyettesítéssel ezeket ellenőrzi is, akkor mind a 4 pont jár.</i>
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 25$ és $y = -25$ .	2 pont	
A metszéspont: $M(25;-25)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

**II. B**

<b>16. a)</b>		
A feladat megértését (a kúp magassága 6 méter) tükröző jó ábra.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ábra nélkül helyes adatokkal dolgozik a vizsgázó.</i>
		
A henger térfogata: $V_h = 18^2 \cdot 4 \cdot \pi \approx 4071,5 \text{ (m}^3\text{)}$ .	1 pont	<i>Csak a képletekért (behelyettesítés nélkül) nem jár pont. Ha 3,14-gyel jól számol, akkor a megfelelő pontok járnak.</i>
A kúp térfogata: $V_k = \frac{1}{3} \cdot 18^2 \cdot 6 \cdot \pi \approx 2035,8 \text{ (m}^3\text{)}$ .	1 pont	
$\frac{V_h + V_k}{6} \left( = \frac{4071,5 + 2035,8}{6} \approx 1017,9 \right)$	1 pont*	
Ebben a sátorban a maximális nézőszám 1017.	1 pont*	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

A \*-gal jelölt 2 pont jár, ha a vizsgázó a henger térfogatát  $4072 \text{ m}^3$ -re, a kúp térfogatát  $2036 \text{ m}^3$ -re kerekítve a maximális nézőszámot 1018-ban határozza meg.

<b>16. b) első megoldás</b>		
Az eladott gyerekjegyek számát jelölje $x$ , ekkor a felnőttjegyek száma $1000 - x$ .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A gyerekjegy $800 \cdot 0,75 = 600$ Ft-ba kerül.	1 pont	
$600x + 800 \cdot (1000 - x) = 665\,800$	1 pont	
Az egyenlet megoldása: $x = 671$ .	1 pont	
671 gyerekjegyet és 329 felnőttjegyet adtak el.	1 pont	
Szöveg szerinti ellenőrzés.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	



<b>16. b) második megoldás</b>		
Az eladott gyerekjegyek számát megkapjuk, ha az 1000 db felnőttjegyből származó lehetséges bevétel és a tényleges bevétel különbségét elosztjuk a gyerekjegyre adott kedvezménnyel.	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A gyerekjegyre $800 \cdot 0,25 = 200$ Ft kedvezményt adnak.	1 pont	
$\frac{800\,000 - 665\,800}{200} = 671$	2 pont	
671 gyerekjegyet és 329 felnőttjegyet adtak el.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>16. c)</b>		
A legelső szinten álló 4 artista $4!(= 24)$ féleképpen állhat egymás mellett,	1 pont	
a rajtuk álló 3 artista $3!(= 6)$ ,	1 pont	
a felettük álló 2 artista 2-féleképpen állhat.	1 pont	
Az összes lehetőség(et ezek szorzata adja): $4! \cdot 3! \cdot 2!(= 288)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>17. a)</b>		
A feladatban szereplő számok egy olyan számtani sorozat tagjai, amelynek első tagja 2,	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
különbsége pedig 3.	1 pont	
A sorozat 25. tagja: $a_{25} = 2 + 24 \cdot 3 = 74$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

*Ha a sorozat tagjainak felsorolásával jut helyes eredményre, akkor is jár a 3 pont.*

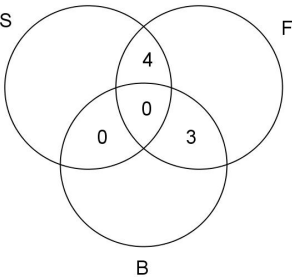
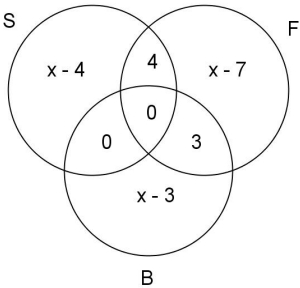
<b>17. b)</b>		
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Megoldandó (a pozitív egész számok halmazán) a $8475 = \frac{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$ egyenlet.	1 pont	
Rendezve a $3n^2 + n - 16950 = 0$ egyenlethez jutunk.	2 pont	
Ennek gyökei $n_1 = 75$ és $n_2 = -75,3$ .	1 pont	
A feladat (pozitív egész) megoldása: $n = 75$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Ha a sorozat tagjainak felsorolásával jut helyes eredményre, akkor is jár a 6 pont.*

<b>17. c)</b>		
Az 5-tel osztható és 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok egy olyan számtani sorozatot alkotnak,	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldás menetéből derül ki.</i>
melynek különbsége 15.	1 pont	
A legkisebb ilyen háromjegyű szám a 110,	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
a legnagyobb ilyen háromjegyű szám a 995.	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
$995 = 110 + (n-1) \cdot 15$	1 pont	<i>Ha <math>n</math>-re <math>a \frac{995-110}{15} = 59</math> értéket fogadja el, akkor ez a 2 pont nem jár.</i>
$n = 60$ , a sorozatnak 60 darab (háromjegyű, 5-tel osztható) tagja van.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Ha a sorozat tagjainak felsorolásával jut helyes eredményre, akkor is jár a 8 pont.*

<b>18. a)</b>		
A 32 diák közül 7-en választottak két szint, így azok száma, akik csak egyet jelöltek: 25.	1 pont	
$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A kérdéses valószínűség: $P = \frac{25}{32} (= 0,78125)$ .	1 pont	<i>Ez az 1 pont jár az eredmény helyesen kerekített vagy százalékos alakban történő megadása esetén is.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>18. b) első megoldás</b>		
A feladatban szereplő halmazok metszetének elemszámát helyesen megjelenítő Venn-diagram:		
	2 pont	
(Az egyes színeket választók számát $x$ -szel jelölve:)		
	2 pont	
$3x - 7 = 32$	2 pont	
$x = 13$	1 pont	
(A fehér szint összesen 13-an választották, ebből $13 - 7 = 6$ diák csak a fehér szint jelölte meg.)	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>18. b) második megoldás</b>		
Venn-diagram, mint az első megoldásnál.	2 pont	
(A csak a fehér színt választók számát $y$ -nal jelölve:)	2 pont	
$3y + 14 = 32$	2 pont	
$y = 6$	1 pont	
6 diák jelölte meg csak a fehér színt.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>18. b) harmadik megoldás</b>		
A sárga színt választók halmazát $S$ -sel, a fehérét választók halmazát $F$ -fel és a bordót választók halmazát $B$ -vel jelölve: $ S \cap F  = 4$ és $ B \cap F  = 3$ , továbbá $ S \cap B  = 0$ (és $ S \cap B \cap F  = 0$ ).	2 pont	
$ S  =  F  =  B  = x$	2 pont	
(A logikai szita formula alapján:) $32 = x + x + x - (4 + 3)$	2 pont	
$x = 13$	1 pont	
(A fehér színt összesen 13-an választották, ebből $13 - 7 = 6$ diák csak a fehér színt jelölte meg.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>18. c) első megoldás</b>		
Két lehetőséget kell vizsgálni: 2 fiúnak és 1 lánynak vagy 1 fiúnak és 2 lánynak ad virágot.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az 5 fiú közül kettőt $\binom{5}{2}(=10)$ , a 2 lány közül egyet 2-féleképpen tud kiválasztani,	1 pont	
vagyis az első esetben $10 \cdot 2 = 20$ különböző lehetősége van.	1 pont	
Az 5 fiú közül egyet 5, a 2 lány közül kettőt egyféleképpen tud kiválasztani,	1 pont	
vagyis a második esetben 5 különböző lehetősége van.	1 pont	
(Az összes lehetőség ezek összege), vagyis $20 + 5 = 25$ -féleképpen választhat.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>18. c) második megoldás</b>		
A megfelelő kiválasztások számát megkapjuk, ha az összes lehetséges kiválasztások számából kivonjuk azokat, amelyek nem megfelelőek.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A 7 barát közül 3-at $\binom{7}{3}(=35)$ -féleképpen lehet kiválasztani,	1 pont	
ezek közül nem megfelelőek azok, amikor csak fiúkat választ ki.	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. Nem bontható.</i>
A nem megfelelő kiválasztások száma $\binom{5}{3}(=10)$ .	1 pont	
A megfelelő kiválasztások száma így $35 - 10 = 25$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Ha a vizsgázó a helyes eredményre a különböző kiválasztások rendszerezett felsorolásával jut el, akkor is jár a 6 pont. Ha az eseteket felsorolja, akkor minden hibás eset felírása, illetve minden helyes eset kihagyása esetén 1-1 pontot le kell vonni (összesen legfeljebb 6 pontot).*