ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2014. május 6.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
15 fiú van az osztályban.	2 pont	*Ha tudja, hogy a 35-öt hét egyenlő részre kell osztani, akkor 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$x = 1$	2 pont	*Ha tudja, hogy* $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, *akkor 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
a) A (0; 4) pontban vagy $(y=)4$-nél.	1 pont	
b) $-2x+4=6$	1 pont	*Ha a grafikonról olvassa le a vizsgázó, akkor is jár ez a 2 pont.*
$x=-1$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.		
A dolgozatot $(3^3 =)27$ tanuló írta meg.	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
A fokszámok összege: 14.	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$5-x \geq 0$	1 pont	
$(0 \leq)\ x \leq 5$, $(x \in \mathbf{Z})$	1 pont	
$A = \{0;1;2;3;4;5\}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7.		
A 270º a 360º-nak $\frac{3}{4}$-e.	1 pont	
A kör területe $3^2 \cdot \pi (\approx 28{,}27\ \text{cm}^2)$.	1 pont	*Ha a vizsgázó* π *értékét jól kerekítve használja, akkor ez a 2 pont jár.*
A körcikk területe: $\frac{27}{4} \cdot \pi (\approx 21{,}2)\ \text{cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">8.</td></tr>
<tr><td>

osztályzat	1	2	3	4	5
relatív gyakoriság	0	0,1	0,35	0,4	0,15

</td><td>2 pont</td><td>Az adatok más formában (tört, %) történő helyes megadása esetén is jár a 2 pont. 1 hibás érték esetén 1 pont, 1-nél több hiba esetén nem jár pont.</td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
</table>

9.		
A) igaz	1 pont	
B) hamis	1 pont	
C) igaz	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
A gömb sugara a kocka testátlójának fele.	1 pont	*Ha csak a számolásból látszik ez a gondolat, akkor is jár az 1 pont.*
A kocka testátlójának hossza: $7\cdot\sqrt{3}$ ($\approx 12{,}1$)	1 pont	*Ha megfelelő közelítő értéket használ, jár az 1 pont.*
A gömb sugara tehát $\frac{7\cdot\sqrt{3}}{2}\approx 6{,}1$	1 pont	*Ha nem jól kerekít, ez a pont nem jár.*
Összesen:	**3 pont**	

11.		
B)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">12.</td></tr>
<tr><td>(Az AC átló felezi a BCD szöget.)
Az ACD szög 60º-os,</td><td>1 pont</td><td rowspan="2">A feladat szövegének megfelelő jó ábráért 1 pont jár.</td></tr>
<tr><td>és ACD háromszög egyenlőszárú, vagyis
a háromszög szabályos.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>A keresett átló hossza ezért 6 cm.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>3 pont</td><td></td></tr>
</table>

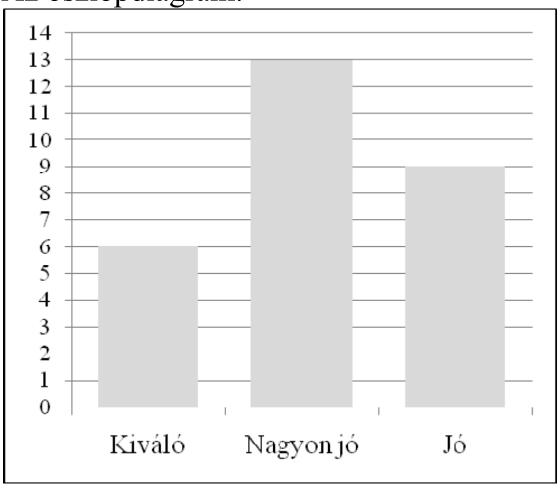
II. A

13. a)		
Értelmezési tartomány: $x > 0$.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem vizsgálja az értelmezési tartományt, de a gyök helyességéről pl. behelyettesítéssel meggyőződik, akkor ezt a pontot is megkapja.*
A logaritmus megfelelő azonosságának helyes alkalmazása.	1 pont	
(A logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű.) $\frac{7x+18}{x} = 9$ (vagy $7x+18 = 9x$)	1 pont	
$x = 9$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az $x > 0$ feltétel felírása mellett az ekvivalens átalakításokra való hivatkozás.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)		
$a = \cos x$ (ahol $-1 \le a \le 1$) helyettesítéssel: $2a^2 - 7a - 4 = 0$.	1 pont	*Az új változó bevezetése nélkül is jár a pont az egyenlet helyes átrendezése esetén.*
Az egyenlet gyökei $a_1 = 4$,	1 pont	
és $a_2 = -\frac{1}{2}$.	1 pont	
Az $a = \cos x = 4$ nem ad megoldást, (mert $\cos x \le 1$.)	1 pont	
A $\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai $[0;2\pi]$-n: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$,	1 pont*	*Ha a vizsgázó az egyenlet mindkét gyökét helyesen adja meg fokban ($x_1 = 120°$ és $x_2 = 240°$), akkor 1 pontot kap.*
$x_2 = \frac{4\pi}{3}$.	1 pont*	
Ellenőrzés (például behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Az egyenlet gyökeinek helyes felírása, de a megadott alaphalmaz figyelmen kívül hagyása (például végtelen sok gyök vagy negatív gyök megadása) esetén a két, *-gal jelölt pontból csak 1 pont adható.*

14. a)		
Az adatok átlaga: $\frac{83\cdot 2+76\cdot 4+69\cdot 2+...+58\cdot 4+56\cdot 4+55}{28}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$=\frac{1816}{28}\approx 64{,}86$.	1 pont	
Mivel az adatok száma páros, ezért a medián a nagyság szerint sorba rendezett adatok közül a két középső számtani közepe:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$\frac{61+65}{2}=63$.	1 pont	
A válasz: igen, az átlag és a medián legalább 1 ponttal eltér egymástól.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b)		
„Kiváló” minősítést érdemel 6 osztály, „Nagyon jó”-t 13, „Jó” minősítést kap 9 osztály.	2 pont	*Két jól számolt adat esetén 1 pont, ez alatt 0 pont jár.*
Az oszlopdiagram: 	2 pont	*Minden elvileg helyes ábrázolás (pl.: a tengelyek felcserélése, összeérő oszlopok) is elfogadható. A 2 pont a függőleges tengely skálája (1), az egyes oszlopok megfelelő azonosíthatósága (2) és a megfelelő adatok ábrázolása (3) esetén jár. Ha ezek közül csak valamelyik kettő megfelelő, akkor 1 pont, ez alatt 0 pont jár.*
Összesen:	**4 pont**	

14. c) első megoldás		
A kedvező esetek száma: $2\cdot 4(=8)$.	1 pont	
Az összes eset száma: $6\cdot 5(=30)$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $P=\frac{8}{30}(=0{,}2\dot{6})$.	1 pont	*A választ bármilyen helyes kerekítéssel vagy százalékos alakban is el kell fogadni.*
Összesen:	**3 pont**	

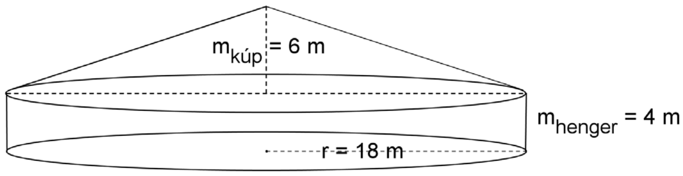
14. c) második megoldás		
Annak valószínűsége, hogy legfelül 83 pontos dolgozat fekszik: $\frac{2}{6}$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy alatta 76 pontos dolgozat fekszik: $\frac{4}{5}$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $P = \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} =\right) \frac{8}{30}$ $(= 0{,}2\dot{6})$.	1 pont	*A választ bármilyen helyes kerekítéssel vagy százalékos alakban is el kell fogadni.*
Összesen:	**3 pont**	

15. a)		
A kérdéses távolság: $d_{AB} = \sqrt{(8-12)^2 + (9-1)^2} =$	1 pont	*A képletért (behelyettesítés nélkül) nem jár pont.*
$= \sqrt{80} (\approx 8{,}944)$ (egység).	1 pont	*Ha a pontos érték nem szerepel és rosszul kerekít a vizsgázó, akkor a második pont nem jár.*
Összesen:	**2 pont**	

15. b)		
Az egyenes egy normálvektora az $\mathbf{n}_e(4;3)$ vektor.	1 pont	
Ezzel az egyenes egyenlete: $4x + 3y = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3$,	1 pont	
azaz $4x + 3y = 25$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. c)		
Az *f* egyenes egy irányvektora az $\overrightarrow{AB}(4;-8)$ vektor.	1 pont	
Ezzel az egyenes egyenlete: $-8x - 4y = (-8) \cdot 8 - 4 \cdot 9$.	1 pont	
Az *f* egyenes egyenlete: $2x + y = 25$.	1 pont	
(A metszéspont koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldása adja:) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 25 \\ 2x + y = 25 \end{array}\right\}$	1 pont	*Ha a vizsgázó a metszéspont koordinátáit a helyes grafikonról jól olvassa le, akkor 1 pontot kap. Ha mindkét egyenes egyenletébe történő behelyettesítéssel ezeket ellenőrzi is, akkor mind a 4 pont jár.*
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 25$ és $y = -25$.	2 pont	
A metszéspont: $M(25;-25)$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II. B

16. a)		
A feladat megértését (a kúp magassága 6 méter) tükröző jó ábra. 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ábra nélkül helyes adatokkal dolgozik a vizsgázó.*
A henger térfogata: $V_h = 18^2 \cdot 4 \cdot \pi \approx$	1 pont	*Csak a képletekért (behelyettesítés nélkül) nem jár pont. Ha 3,14-gyel jól számol, akkor a megfelelő pontok járnak.*
$\approx 4071{,}5\ (\text{m}^3)$.	1 pont	
A kúp térfogata: $V_k = \frac{1}{3} \cdot 18^2 \cdot 6 \cdot \pi \approx$	1 pont	
$\approx 2035{,}8\ (\text{m}^3)$.	1 pont	
$\frac{V_h + V_k}{6} \left(= \frac{4071{,}5 + 2035{,}8}{6} \approx 1017{,}9 \right)$	1 pont*	
Ebben a sátorban a maximális nézőszám 1017.	1 pont*	*Ha a vizsgázó felfelé kerekít, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**7 pont**	

*A *-gal jelölt 2 pont jár, ha a vizsgázó a henger térfogatát 4072 m^3-re, a kúp térfogatát 2036 m^3-re kerekítve a maximális nézőszámot 1018-ban határozza meg.*

16. b) első megoldás		
Az eladott gyerekjegyek számát jelölje x, ekkor a felnőttjegyek száma $1000 - x$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A gyerekjegy $800 \cdot 0{,}75 = 600$ Ft-ba kerül.	1 pont	
$600x + 800 \cdot (1000 - x) = 665\ 800$	1 pont	
Az egyenlet megoldása: $x = 671$.	1 pont	
671 gyerekjegyet és 329 felnőttjegyet adtak el.	1 pont	
Szöveg szerinti ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. b) második megoldás		
Az eladott gyerekjegyek számát megkapjuk, ha az 1000 db felnőttjegyből származó lehetséges bevétel és a tényleges bevétel különbségét elosztjuk a gyerekjegyekre adott kedvezménnyel.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A gyerekjegyre $800 \cdot 0{,}25 = 200$ Ft kedvezményt adnak.	1 pont	
$\frac{800\,000 - 665\,800}{200} = 671$	2 pont	
671 gyerekjegyet és 329 felnőttjegyet adtak el.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c)		
A legalsó szinten álló 4 artista $4!(=24)$ féleképpen állhat egymás mellett,	1 pont	
a rajtuk álló 3 artista $3!(=6)$,	1 pont	
a felettük álló 2 artista 2-féleképpen állhat.	1 pont	
Az összes lehetőség(et ezek szorzata adja): $4! \cdot 3! \cdot 2!(=288)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a)		
A feladatban szereplő számok egy olyan számtani sorozat tagjai, amelynek első tagja 2,	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
különbsége pedig 3.	1 pont	
A sorozat 25. tagja: $a_{25} = 2 + 24 \cdot 3 = 74$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Ha a sorozat tagjainak felsorolásával jut helyes eredményre, akkor is jár a 3 pont.

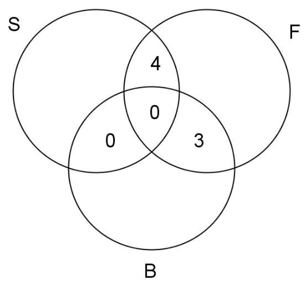
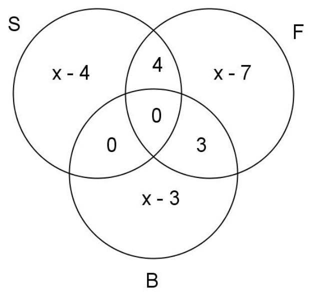
17. b)		
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megoldandó (a pozitív egész számok halmazán) a $8475 = \frac{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$ egyenlet.	1 pont	
Rendezve a $3n^2 + n - 16950 = 0$ egyenlethez jutunk.	2 pont	
Ennek gyökei $n_1 = 75$ és $n_2 = -75,\dot{3}$.	1 pont	
A feladat (pozitív egész) megoldása: $n = 75$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

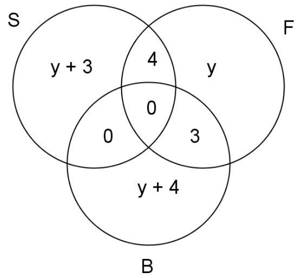
Ha a sorozat tagjainak felsorolásával jut helyes eredményre, akkor is jár a 6 pont.

17. c)		
Az 5-tel osztható és 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok egy olyan számtani sorozatot alkotnak,	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldás menetéből derül ki.*
melynek különbsége 15.	1 pont	
A legkisebb ilyen háromjegyű szám a 110,	2 pont	*Nem bontható.*
a legnagyobb ilyen háromjegyű szám a 995.	2 pont	*Nem bontható.*
$995 = 110 + (n-1) \cdot 15$	1 pont	*Ha n-re a $\frac{995-110}{15} = 59$ értéket fogadja el, akkor ez a 2 pont nem jár.*
$n = 60$, a sorozatnak 60 darab (háromjegyű, 5-tel osztható) tagja van.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Ha a sorozat tagjainak felsorolásával jut helyes eredményre, akkor is jár a 8 pont.

18. a)		
A 32 diák közül 7-en választottak két színt, így azok száma, akik csak egyet jelöltek: 25.	1 pont	
$P = \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kérdéses valószínűség: $P = \dfrac{25}{32} (= 0{,}78125)$.	1 pont	*Ez az 1 pont jár az eredmény helyesen kerekített vagy százalékos alakban történő megadása esetén is.*
Összesen:	**3 pont**	

18. b) első megoldás		
A feladatban szereplő halmazok metszetének elemszámát helyesen megjelenítő Venn-diagram: 	2 pont	
(Az egyes színeket választók számát x-szel jelölve:) 	2 pont	
$3x - 7 = 32$	2 pont	
$x = 13$	1 pont	
(A fehér színt összesen 13-an választották, ebből $13 - 7 =$) 6 diák csak a fehér színt jelölte meg.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. b) második megoldás		
Venn-diagram, mint az első megoldásnál.	2 pont	
(A csak a fehér színt választók számát y-nal jelölve:) 	2 pont	
$3y+14=32$	2 pont	
$y=6$	1 pont	
6 diák jelölte meg csak a fehér színt.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. b) harmadik megoldás		
A sárga színt választók halmazát S-sel, a fehéret választók halmazát F-fel és a bordót választók halmazát B-vel jelölve: $\lvert S\cap F\rvert=4$ és $\lvert B\cap F\rvert=3$, továbbá $\lvert S\cap B\rvert=0$ (és $\lvert S\cap B\cap F\rvert=0$).	2 pont	
$\lvert S\rvert=\lvert F\rvert=\lvert B\rvert=x$	2 pont	
(A logikai szita formula alapján:) $32=x+x+x-(4+3)$	2 pont	
$x=13$	1 pont	
(A fehér színt összesen 13-an választották, ebből $13-7=$) 6 diák csak a fehér színt jelölte meg.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. c) első megoldás		
Két lehetőséget kell vizsgálni: 2 fiúnak és 1 lánynak vagy 1 fiúnak és 2 lánynak ad virágot.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az 5 fiú közül kettőt $\binom{5}{2}(=10)$, a 2 lány közül egyet 2-féleképpen tud kiválasztani,	1 pont	
vagyis az első esetben $10\cdot 2 = 20$ különböző lehetősége van.	1 pont	
Az 5 fiú közül egyet 5, a 2 lány közül kettőt egyféleképpen tud kiválasztani,	1 pont	
vagyis a második esetben 5 különböző lehetősége van.	1 pont	
(Az összes lehetőség ezek összege), vagyis $20 + 5 = 25$-féleképpen választhat.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c) második megoldás		
A megfelelő kiválasztások számát megkapjuk, ha az összes lehetséges kiválasztások számából kivonjuk azokat, amelyek nem megfelelőek.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 7 barát közül 3-at $\binom{7}{3}(=35)$-féleképpen lehet kiválasztani,	1 pont	
ezek közül nem megfelelőek azok, amikor csak fiúkat választ ki.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. Nem bontható.*
A nem megfelelő kiválasztások száma $\binom{5}{3}(=10)$.	1 pont	
A megfelelő kiválasztások száma így $35 - 10 = 25$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Ha a vizsgázó a helyes eredményre a különböző kiválasztások rendszerezett felsorolásával jut el, akkor is jár a 6 pont. Ha az eseteket felsorolja, akkor minden hibás eset felírása, illetve minden helyes eset kihagyása esetén 1-1 pontot le kell vonni (összesen legfeljebb 6 pontot).