ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2015. október 13.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

Figyelem! Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész 2015 májusában lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

I.

1.		
$x_1 = -3$	1 pont	
$x_2 = 7$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2. első megoldás		
A 104°-os külső szög melletti belső szög 76°.	1 pont	
A *C* csúcsnál lévő belső szög nagysága $180° - (76° + 74°) = 30°$,	1 pont	
az ehhez tartozó külső szög 150°.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. második megoldás		
A 104°-os külső szög melletti belső szög 76°.	1 pont	
A *C* csúcsnál lévő külső szög nagysága a másik két csúcsnál lévő belső szög összegével egyenlő,	1 pont	
vagyis 150°.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. harmadik megoldás		
A 74°-os belső szög melletti külső szög 106°.	1 pont	
A háromszög külső szögeinek összege 360°,	1 pont	
ezért a *C* csúcsnál lévő külső szög nagysága $(360° - 104° - 106° =)150°$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
[0; 2]	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó válasza nyílt vagy félig nyílt intervallum, de az intervallum határait jól adja meg, akkor 1 pontot kapjon.

4.		
h	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$A = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$ $B = \{1; 7; 49\}$	1 pont	
$A \cap B = \{1; 7\}$	1 pont	
$B \setminus A = \{49\}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
10	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: A kételemű részhalmazok helyes felsorolása 1 pontot ér.

7.		
A) igaz B) hamis C) igaz	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

8.		
$x_1 = 4$	1 pont	
$x_2 = -8$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
Terjedelem: 6	1 pont	
Átlag: 3	1 pont	
Szórás: 2	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: A szórás képletébe való jó behelyettesítésért vagy a szórásnégyzet meghatározásáért 1 pont jár.

10.		
Az összes eset száma 25.	1 pont	
Ezek között 12 darab néggyel osztható van (kedvező esetek száma).	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség $\frac{12}{25} = 0{,}48$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11. **első megoldás**		
A bruttó ár a nettó ár 1,27-szorosa.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A termék nettó ára $\frac{6350}{1{,}27} = 5000$ (Ft),	1 pont	
így az áfa (6350 – 5000 =) 1350 Ft.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11. **második megoldás**		
Az áfa $\frac{6350}{127} \cdot 27 =$	2 pont	
= 1350 Ft.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
Flóra mostanáig 2 mérkőzését játszotta le.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

II. A

13. a) első megoldás		
$18 - 32 = -14$	1 pont	$32 + 2d = 18$
Így a differencia –7.	1 pont	
$a = 25$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. a) második megoldás		
$a = \frac{18+32}{2} =$	1 pont	
$= 25$	1 pont	
A differencia –7.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. b)		
A hányadost q-val jelölve $q^2 = \frac{18}{32}$.	1 pont	$b^2 = 32 \cdot 18 = 576$
Ebből $q_1 = \frac{3}{4}$,	1 pont	
és $b_1 = 24$,	1 pont	
vagy $q_2 = -\frac{3}{4}$,	1 pont	
és $b_2 = -24$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. c)		
A három szám mediánja c,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
átlaga $\frac{32+c+18}{3}$.	1 pont	
Ezek alapján $\frac{32+c+18}{3} = c - 2$,	1 pont	
azaz $50 + c = 3c - 6$,	1 pont	
amiből $c = 28$ (ami valóban a három szám mediánja).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
Péter 30 mérkőzésből 25-öt megnyert.	1 pont	
Így a vívással szerzett pontjainak száma: $250 + 4 \cdot 7 =$	1 pont	
$= 278$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
250 – 215 = 35	1 pont	
Bencének (35 : 7 =) 5 győzelem hiányzik a 21-hez,	1 pont	
így összesen 16 győzelmet ért el.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

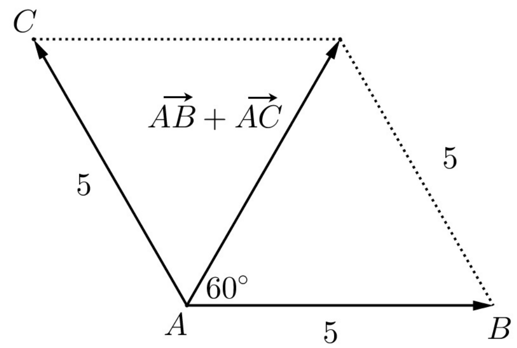
14. c)		
C	1 pont	
C	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

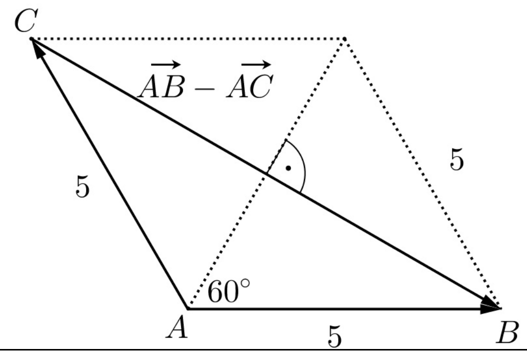
14. d)		
Az *A* típusú akadályok lehetséges sorrendjeinek a száma 5!, ugyanez a *B* típusúaknál 4!, a *C* típusúaknál 3!.	2 pont	
A 12 akadály lehetséges sorrendjeinek a száma ezek szorzata,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
azaz 17 280.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

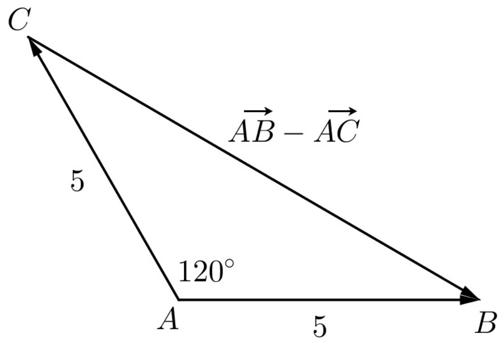
15. a)		
Az *A* csúcsnál lévő szöget α-val jelölve: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{6}$.	1 pont	
Ebből $\alpha \approx 53{,}13°$.	1 pont	
(A *B* csúcsnál lévő β szög az α-t 90°-ra egészíti ki, így) $\beta \approx 36{,}87°$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b)		
A *DF* befogó hosszát (cm-ben) jelölje *x*, ekkor *DE* = *x* – 7, *EF* = *x* + 2.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A Pitagorasz-tétel szerint $x^2 + (x-7)^2 = (x+2)^2$.	1 pont	
A zárójeleket felbontva: $x^2 + x^2 - 14x + 49 = x^2 + 4x + 4$.	1 pont	
Rendezve: $x^2 - 18x + 45 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet egyik gyöke *x* = 3,	1 pont	
de ez a feladatnak nem megoldása, mert ekkor a másik befogó hosszára negatív érték adódik.	1 pont	
Az egyenlet másik gyöke *x* = 15,	1 pont	
így a háromszög oldalainak hossza: *DE* = 8 cm, *DF* = 15 cm, *EF* = 17 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

II. B

16. a)		
Ábra az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ vektor feltüntetésével. 	1 pont	
Az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ és az $\overrightarrow{AB}$ vektorok egy olyan egyenlő szárú háromszög két oldalát határozzák meg, amelynek egyik szöge 60°-os, így a háromszög szabályos.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az összegvektor hossza ezért 5 egység.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b) első megoldás		
Ábra az $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ vektor feltüntetésével. 	1 pont	
A különbségvektor hossza egy 5 egység oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
azaz $2\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\approx$	1 pont	
$\approx$ 8,66 egység.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

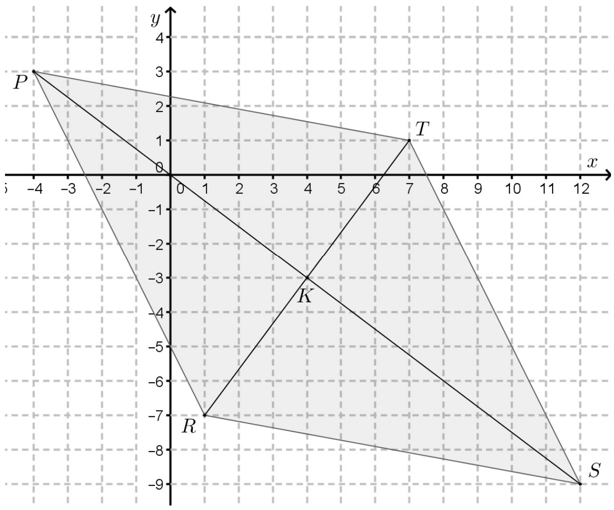
16. b) második megoldás		
Ábra az $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ vektor feltüntetésével.  	1 pont	
A koszinusztétel alkalmazásával:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos 120°} \approx$	1 pont	
$\approx$ 8,66 egység.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. c)		
(A rombusz átlói felezve metszik egymást a K pontban, így a K pont a TR átló felezőpontja.) Az $R(x_R; y_R)$ koordinátáira: $\frac{7+x_R}{2}=4$, illetve $\frac{1+y_R}{2}=-3$.	1 pont	
Ebből $x_R=1$ és $y_R=-7$, azaz $R(1; -7)$.	1 pont	
$\overrightarrow{KT}(3;4)$.	1 pont*	
Ezt 90°-kal elforgatva kapjuk a (–4; 3) vektort.	2 pont*	
Ennek kétszerese a $\overrightarrow{KP}$ (–8; 6) vektor,	1 pont*	
melynek ellentettje a $\overrightarrow{KS}$ (8; –6) vektor.	1 pont*	
A K pont koordinátáihoz adva ezeknek a vektoroknak a megfelelő koordinátáit, kapjuk a hiányzó csúcsok koordinátáit.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ebből $P(-4; 3)$	1 pont	
és $S(12; -9)$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

*A *-gal jelölt 6 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A rombusz rövidebb átlójának a fele $d_{KT} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ egység hosszú.	1 pont	
A K középpontú 10 egység sugarú k kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 100$.	1 pont	
A rombusz PS átlójának e egyenese illeszkedik a K pontra, továbbá egy normálvektora a $\overrightarrow{KT}(3;4)$ vektor.	1 pont	
Így e egyenlete: $3x + 4y = 0$.	1 pont	
A k kör és az e egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = -4$ és $y_1 = 3$,	1 pont	
vagy $x_2 = 12$ és $y_2 = -9$.	1 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a keresett pontok koordinátáit (további indoklás nélkül) ábráról leolvasva helyesen adja meg, akkor ezért legfeljebb 4 pontot kapjon.



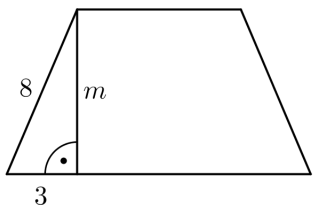
17. a) **első megoldás**		
$t(0) = 3600$	1 pont	
$t(2) \approx 2626$	1 pont	
$\frac{2626}{3600} \approx 0,73$	1 pont	
A tigrisek száma kb. 27%-kal csökken.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a) **második megoldás**		
A tigrisek száma minden évben az előző évinek 0,854-szeresére változik.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$0,854^2 \approx$	1 pont	
$\approx 0,73$	1 pont	
A tigrisek száma kb. 27%-kal csökken.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
Megoldandó a $3600 \cdot 0{,}854^x = 900$ egyenlet, (ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.)	1 pont	
$0{,}854^x = 0{,}25$	1 pont	
$x = \frac{\lg 0{,}25}{\lg 0{,}854} \approx$	1 pont	$x = \log_{0{,}854} 0{,}25$
$\approx 8{,}78$	1 pont	
(9 év múlva, azaz) 2023-ban várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzések: 1. Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.
2. Ha a vizsgázó a tigrisek számát – jó kerekítéssel – évről évre felírja, és így helyes választ ad, akkor maximális pontszámot kap.

17. c)		
(I) és (II) miatt a kisebb kifutóba három vagy négy tigris kerülhet.	1 pont	
Ha három tigris kerül a kisebb kifutóba, akkor (III) és (IV) miatt ez csak két nőstény és egy hím lehet.	1 pont	
A két nőstényt és egy hímet $\binom{5}{2} \cdot 4$ (= 40)-féleképpen lehet kiválasztani (és egy ilyen kiválasztás egyértelműen meghatározza, hogy a nagyobb kifutóba a másik hat tigris kerül).	2 pont	
Ha négy tigris kerül a kisebb kifutóba, akkor (III) és (IV) miatt (figyelembe véve a másik kifutót is) ez csak két nőstény és két hím lehet.	1 pont	
A két nőstényt és a két hímet $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}$ (= 60)-féleképpen lehet kiválasztani (és egy ilyen kiválasztás egyértelműen meghatározza, hogy a nagyobb kifutóba a másik öt tigris kerül).	2 pont	
Így összesen 40 + 60 = 100-féle eset lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. a)		
Az a oldalhosszúságú szabályos hatszög területét kiszámíthatjuk hat darab a oldalhosszúságú szabályos háromszög területének összegeként.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A csonkagúla fedőlapjának területe: $t_1 = 6 \cdot \frac{7^2 \cdot \sin 60°}{2} \approx$	1 pont	
$\approx 127{,}3$ (cm^2).	1 pont	
A csonkagúla egy oldallapjának magasságát m-mel jelölve: 	1 pont	
A Pitagorasz-tétel alapján $3^2 + m^2 = 8^2$.	1 pont	
$m \approx 7{,}42$ (cm)	1 pont	
Egy oldallap területe $t_2 = \frac{7+13}{2} \cdot 7{,}42 = 74{,}2$ (cm^2).	1 pont	
A teljes felület $F = t_1 + 6 \cdot t_2 = 572{,}5$ (cm^2).	1 pont	
0,93 m^2 = 9300 cm^2	1 pont	
9300 : 572,5 ≈ 16,24	1 pont	
1 kg alapanyagból 16 darab doboz készíthető.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

18. b)		
Ha legalább 8 virághagyma kihajt, akkor 10, 9 vagy 8 hajt ki.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak valószínűsége, hogy mind a 10 kihajt: $0{,}91^{10}$ (≈ 0,3894).	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy 9 kihajt, de 1 nem: $\binom{10}{9} \cdot 0{,}91^9 \cdot 0{,}09$ (≈ 0,3851).	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy 8 kihajt, de 2 nem: $\binom{10}{8} \cdot 0{,}91^8 \cdot 0{,}09^2$ (≈ 0,1714).	1 pont	
A kérdéses valószínűség ezek összege,	1 pont	
azaz kb. 0,946.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a feladat megoldása során az egyes valószínűségek három tizedesjegyre kerekített értékével jól számol, akkor 0,945 is elfogadható.