Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2015. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2015. május 5. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!**
   Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 9. feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

I.

1. Adott a $4x^2 + 4y^2 = 90$ egyenletű k kör és az $x + 3y = 0$ egyenletű g egyenes.
Írja fel a k kör g-vel párhuzamos érintőinek egyenletét!

Ö.:	12 pont	

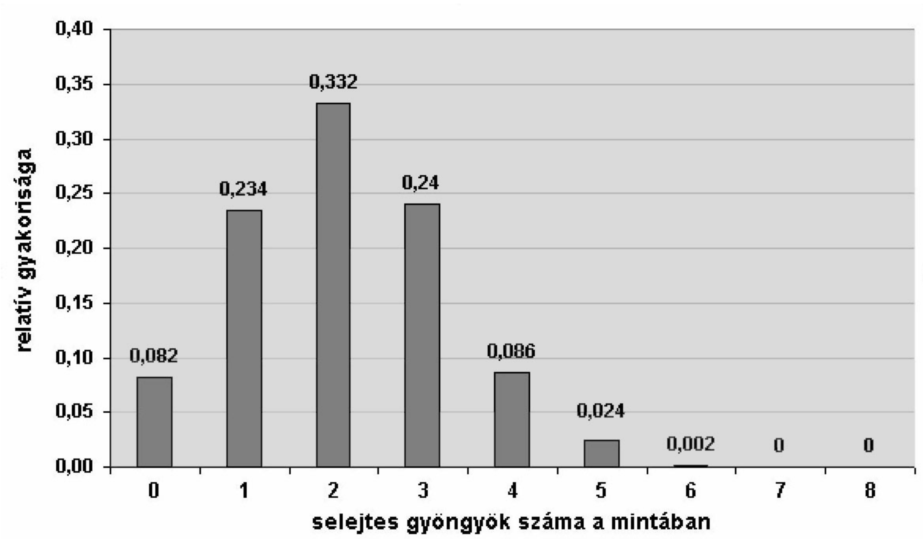
2. Egy dobozban 40 üveggyöngy között 8 selejtes van. Egy kísérlet abból áll, hogy a 40 gyöngy közül **visszatevés nélküli mintavétellel**, véletlenszerűen kiválasztanak 10-et, és megszámolják, hogy hány selejtes van közöttük.

a) Egy tanulócsoport tagjai összesen 500 alkalommal végezték el a fent leírt kísérletet. A kísérletek befejezése után összesítették a tapasztaltakat: a 10 elemű mintákban előforduló selejtes gyöngyök számának relatív gyakoriságát oszlopdiagramon ábrázolták. A diagram segítségével válaszoljon a következő kérdésekre:

I. Mennyi volt az egy mintában előforduló legtöbb selejtes gyöngy?

II. Mennyi volt az egy mintában legtöbbször előforduló selejtszám?

III. Hány alkalommal nem volt a 10 elemű mintában egyetlen selejtes gyöngy sem?



b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kísérletet egyszer elvégezve a mintában pontosan 2 selejtes lesz! Állapítsa meg, hogy az eseménynek az 500 kísérletből kapott relatív gyakorisága hány százaléka a kiszámított valószínűségnek!

c) Egy másik kísérletben ugyanebből a 40 gyöngyből **visszatevéses mintavétellel** választunk ki 10 gyöngyöt. Ekkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában pontosan 2 selejtes gyöngy lesz?

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	13 pont	

3. Egy hegy és a tetején álló kilátótorony magasságát szeretnénk meghatározni. Legyen a kilátótorony legmagasabban lévő pontja A, a kilátó talppontja B. A hegy lábánál elterülő vízszintes, sík mezőn a toronytól ugyanabban az irányban felvesszük az egymástól 30 méterre lévő P és Q pontokat úgy, hogy az A, B, P és Q pontok ugyanabban a (függőleges) síkban legyenek. A P pontból a torony alját (a B pontot) 29°-os, a tetejét (az A pontot) 33°-os, a Q pontból a torony alját 27°-os emelkedési szög alatt látjuk.

a) Hány méterrel emelkedik a mező fölé a hegy, amelynek tetején a kilátó áll?

b) Milyen magas a kilátó?

Válaszait egész méterre kerekítve adja meg!

a)	8 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

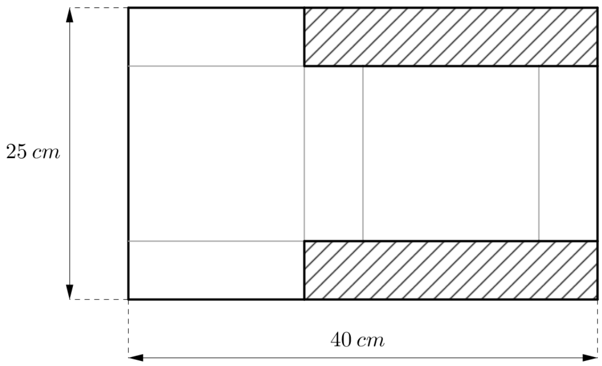
4. Jelölje a $4x^2 - 19x + 22 < 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát *A*, a $\sin 2x < 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát pedig *B*.
Igazolja, hogy $A \subset B$!

Ö.:	13 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy 40 cm × 25 cm-es kartonlapból kivágunk két egybevágó téglalapot, az ábrán ezek vonalkázva láthatók. A megmaradt kartonlapból ezután (a berajzolt élek mentén) egy olyan téglatestet hajtogatunk, melynek magassága a kivágott téglalapok rövidebb oldalával egyenlő.



a) Mekkora lesz a kapott téglatest felszíne, ha a kivágott téglalapok rövidebb oldala 2 cm-es?

b) Hogyan válasszuk meg a kivágott téglalapok rövidebb oldalának hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az elkészített téglatest térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?

a)	4 pont	
b)	12 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. **a)** Egy 9 pontú fagráfban ismerjük 8 pont fokszámát: 1; 1; 1; 1; 2; 3; 3, 3. Határozza meg a kilencedik pont fokszámát!

b) Van-e olyan 9 pontú egyszerű gráf, amelyben mind a 9 pontnak más a fokszáma?

c) Egy kilenctagú társaságban kézfogással köszöntik egymást az emberek. Eddig 4 kézfogás történt. Hány különböző módon történhetett ez meg, ha senki sem fogott kezet egynél többször, és a kézfogások sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

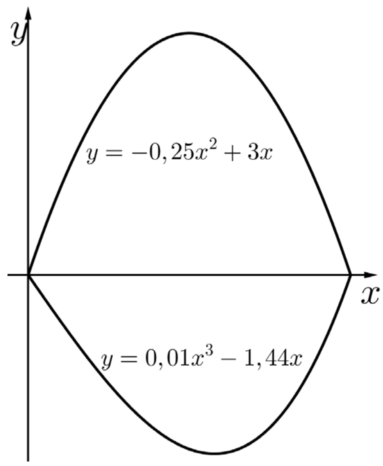
Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Egy iskola egyéni sakkbajnokságának döntőjében minden versenyző egyszer játszott a többi döntőbe jutott versenyzővel. A verseny végén kiderült, hogy a versenyzők elért pontszámai egy szigorúan növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai.
Hányan versenyeztek a döntőben és hány pontja volt a győztesnek, ha az utolsó helyezett összesen 1 pontot szerzett? (A sakkversenyen győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont jár.)

Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y=-0{,}25x^2+3x$, illetve az $y=0{,}01x^3-1{,}44x$ egyenletű görbéknek az az íve, amelyre $0 \le x \le 12$. (Ez a két ív az ábrán is látható.) Tudjuk, hogy a (0; 0) és a (12; 0) pont a két ív közös pontja.



a) Mindkét ív esetében adja meg az ív x tengelytől legtávolabbi pontjának első koordinátáját!

b) Mekkora a két ív által közrezárt síkidom területe?

c) Értelmezzük a]0; 12[intervallumon az alábbi hozzárendeléssel megadott f és g függvényeket:
$f(x)=\dfrac{-0{,}25x^2+3x}{0{,}01x^3-1{,}44x}$ és $g(x)=-\dfrac{25}{x+12}$.
Igazolja, hogy $f(x)=g(x)$, és mutassa meg, hogy a g függvény szigorúan monoton növekvő!

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy osztály tanulói matematikadolgozatot írtak, melynek során három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladatot összesen 22-en oldották meg, közülük a második feladatot is megoldotta 16 tanuló. Azok, akik mindhárom feladatot megoldották, háromszor annyian voltak, mint akiknek csak az első feladat sikerült. Azok, akik csak az első két feladatot tudták megoldani, két és félszer annyian voltak, mint akik csak az elsőt és a harmadikat.

a) Hány tanuló oldotta meg mindhárom feladatot?

Összesen 30-an írták meg a dolgozatot. A dolgozatokat a tanár 1-től 5-ig terjedő egész osztályzatokkal értékelte. Az osztályzatok átlaga 3,4, mediánja 3,5, egyetlen módusza 4 volt. Amikor a tanár kiosztotta a dolgozatokat, a dolgozatírók közül hatan hiányoztak. A 24 kiosztott dolgozat között 7 db ötös, 5 db négyes, 6 db hármas, 4 db kettes és 2 db egyes volt.

b) Hányas lehetett a hat hiányzó tanuló dolgozata?

a)	7 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	12		**51**	
	2.	13			
	3.	13			
	4.	13			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	elért pontszám **egész számra** kerekítve	programba beírt **egész** pontszám
I. rész		
II. rész		

javító tanár

jegyző

dátum

dátum