ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2015. május 5.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon!
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek az értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$A \cap B = \{3;4;5\}$	1 pont	
$B \cup C = \{3;4;5;6;7;8;9;10\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{1; 2\}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2.		
14	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

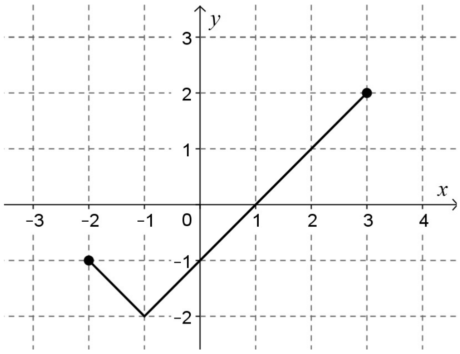
3.		
A) igaz B) hamis C) igaz	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
[–2; 2]	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$(a+9)(a-1) = a^2 + 9a - a - 9$	1 pont	
$(a-4)^2 = a^2 - 8a + 16$	1 pont	
Összevonás után: $2a^2 + 7$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
a) –3	1 pont	
b) –54	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
17 éves	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
		
Az ábrázolt grafikon az abszolútérték-függvény grafikonjából eltolással származik.	1 pont	
Az ábrázolt függvény minimumhelye –1, minimuma –2.	1 pont	
A függvény értelmezési tartománya le van szűkítve a megadott intervallumra.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
Jó ábra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A kúp magassága (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{41^2 - 9^2} =$	1 pont	
= 40 (cm).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
A vizsgázó öt darab pozitív egész számot adott meg.	1 pont	
A megadott számok mediánja 4,	1 pont	
átlaga 3.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: A két lehetséges megoldás {1; 1; 4; 4; 5} és {1; 2; 4; 4; 4}.

11.		
$x^2 + (y-3)^2 =$	1 pont	
$= 4$	1 pont	
A kör sugara 2.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
$\frac{1}{8}(= 0{,}125)$	2 pont	*Százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

II. A

13. a)		
$3\cdot(-7)+7p=21$	1 pont	
$p=6$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. b)		
Az e egyenes egy normálvektora az $\mathbf{n}_e(3; 7)$ vektor.	1 pont	
Így a rá merőleges f egyenes egy normálvektora az $\mathbf{n}_f(-7; 3)$ vektor.	1 pont	
$-7x+3y=(-7)\cdot 1+3\cdot(-2)$	1 pont	
Az f egyenes egyenlete $-7x+3y=-13$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. c) első megoldás		
A g egyenes meredeksége $m_g=-\frac{3}{7}$.	1 pont	
Az e egyenes egyenlete átrendezve $y=-\frac{3}{7}x+3$.	1 pont	
Az e egyenes meredeksége $m_e=-\frac{3}{7}$.	1 pont	
Mivel a két egyenes meredeksége megegyezik, ezért párhuzamosak.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. c) második megoldás		
A g egyenes egyenletéből y-t behelyettesítjük az e egyenes egyenletébe.	1 pont	
$3x-3x+35=21$	1 pont	
Ennek az egyenletnek nincs megoldása,	1 pont	
vagyis a két egyenesnek nincs közös pontja, így párhuzamosak.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a két egyenest helyesen ábrázolja közös koordinátarendszerben, akkor ezért 1 pontot kapjon. Ha az ábra alapján indoklás nélkül megállapítja, hogy a két egyenes párhuzamos, akkor ezért még 1 pont jár. Ha ezeken felül az ábráról – indoklásként – jól olvassa le mindkét egyenes meredekségét, akkor ezért a teljes pontszám jár.

14. a)		
(A kérdéses szöget α-val jelölve) $\mathrm{tg}(180° - \alpha) = \frac{6}{4}$	1 pont	
$\alpha \approx 56{,}3°$	1 pont	
A kérdéses szög nagysága kb. 123,7°.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
Az összes eset száma: $\binom{28}{3} (= 3276)$.	1 pont	
A kedvező esetek száma: $\binom{8}{1} \cdot \binom{20}{2} (= 1520)$.	2 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{28}{3}} \approx 0{,}464$.	1 pont	*Más ésszerűen (legalább két tizedesjegyre) és helyesen kerekített érték, továbbá százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**4 pont**	

14. c)		
A keletkező forgástest egy hengerből és annak körlapjaira illeszkedő két egybevágó csonkakúpból áll.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A henger alapkörének sugara és magassága egyaránt 6 cm.	1 pont	
Térfogata $V_{\mathrm{h}} = 216\pi \, (\approx 678{,}58)$ (cm^3).	1 pont	
A csonkakúp alapkörének sugara és magassága egyaránt 6 cm, fedőkörének sugara 2 cm.	1 pont	
Térfogata $V_{\mathrm{csk}} = \frac{\pi \cdot 6}{3} \cdot (6^2 + 6 \cdot 2 + 2^2) =$ $= 104\pi \, (\approx 326{,}73)$ (cm^3).	1 pont	
A kérdéses térfogat: $V_{\mathrm{h}} + 2V_{\mathrm{csk}} = 424\pi \approx$	1 pont	
≈ 1332 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. a)		
$f(6)=3\cdot 2^{6-1}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$=96$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

15. b)		
$2^{x-1}=0{,}125$	1 pont	
$2^{x-1}=\frac{1}{8}$	1 pont	$\lg 2^{x-1}=\lg 0{,}125$
$2^{x-1}=2^{-3}$	1 pont	$(x-1)\cdot\lg 2=\lg 0{,}125$
(Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $x-1=-3$.	1 pont	$x=\frac{\lg 0{,}125}{\lg 2}+1$
$x=-2$	1 pont	
Ellenőrzés: behelyettesítés vagy ekvivalenciára hivatkozás.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

15. c)		
A sorozat első tagja $a_1=3$,	1 pont	
hányadosa $q=2$.	1 pont	
Az első 10 tag összege $S_{10}=3\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=$	1 pont	
= 3 069.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó kiszámítja a sorozat első 10 tagját, és ezeket jól összeadja, akkor 4 pontot kapjon. Egy hiba (egy tag értékének hibás megadása vagy hibás összeadás) esetén 2 pont jár, egynél több hiba esetén nem jár pont.

II. B

16. a)		
Meg kell határozni a gyermektelen családok számát 1990-ben és 2011-ben.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A gyermektelen családok száma 1990-ben $2896 \cdot 0{,}48 \approx 1\,390$ (ezer),	1 pont	
2011-ben $2713 \cdot 0{,}52 \approx 1\,411$ (ezer) volt.	1 pont	
$\frac{1411}{1390} \approx 1{,}015$	1 pont	
A gyermektelen családok száma 1990-ről 2011-re kb. 1,5%-kal nőtt.	1 pont	*Más, legalább egy tizedesjegyre helyesen kerekített érték is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

16. b) első megoldás		
$\frac{0 \cdot 52 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{100} =$	2 pont	
= 0,8 (eltartott gyermek jutott átlagosan egy családra 2011-ben.)	1 pont	*Egészre kerekített érték nem fogadható el.*
Összesen:	**3 pont**	

16. b) második megoldás

Az eltartott gyermekek száma	A családok száma 2011-ben (ezer)
0	1411
1	678
2	434
3	136
4 vagy több	54

(a fenti táblázat)	1 pont	
$\frac{0 \cdot 1411 + 1 \cdot 678 + 2 \cdot 434 + 3 \cdot 136 + 4 \cdot 54}{2713} \approx$	1 pont	
≈ 0,8 (eltartott gyermek jutott átlagosan egy családra 2011-ben.)	1 pont	*Más, legalább egy tizedesjegyre helyesen kerekített érték is elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó tévesen a 2011-es helyett az 1990-es adatot számolja ki helyesen (0,84), akkor ezért 2 pontot kapjon.

16. c) **első megoldás**		
Egy mennyiség 0,7%-kal történő csökkentése a mennyiség 0,993-del való szorzását jelenti.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Egy mennyiség 6,3%-kal történő növelése a mennyiség 1,063-del való szorzását jelenti.	1 pont	
A háztartások számát (ezerben) 1990-ben jelölje x, ekkor felírható: $x \cdot 0{,}993 \cdot 1{,}063 = 4106$.	1 pont	
$x \approx 3890$,	1 pont	
tehát kb. 3 890 ezer háztartás volt az országban 1990-ben.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

16. c) **második megoldás**		
2001-ben a háztartások száma (ezerben) $\frac{4106}{1{,}063} \approx$	1 pont	
$\approx 3862{,}65$.	1 pont	
1990-ben $\frac{3862{,}65}{0{,}993} \approx$	1 pont	
$x \approx 3890$,	1 pont	
tehát kb. 3 890 ezer háztartás volt az országban 1990-ben.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

16. d) **első megoldás**		
A két körlap területének aránya $\lambda^2 = \frac{1317}{946}$ ($\approx 1{,}39$).	2 pont	
vagyis $\lambda \approx 1{,}18$.	1 pont	
A kérdezett sugár nagysága $(4{,}5 \cdot \lambda \approx)$ 5,3 cm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. d) **második megoldás**		
Az 1990-es év adatát ábrázoló kör területe $t_1 = 4{,}5^2\pi$ ($\approx 63{,}62$) (cm^2).	1 pont	
Így a másik kör területe $t_2 = t_1 \cdot \frac{1317}{946}$ ($\approx 88{,}57$) (cm^2).	1 pont	
Ebből a kérdezett sugár nagysága $= \sqrt{\frac{t_2}{\pi}} \approx$	1 pont	
$\approx 5{,}3$ cm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Más ésszerűen és helyesen kerekített eredmény is elfogadható.

17. a) első megoldás		
(Ha a rövidebb útvonal hossza x km, akkor a másik útvonal $(x + 140)$ km hosszú. A feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $\frac{x}{71} = \frac{x+140}{106}$.	2 pont	
$106x = 71x + 9940$	1 pont	
$x = 284$	1 pont	
A rövidebb útvonal hossza 284 km.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. a) második megoldás		
(Az út megtételéhez szükséges időt órában jelölje y. A feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $71y + 140 = 106y$	2 pont	
$y = 4$	1 pont	
$71 \cdot 4 = 284$	1 pont	
A rövidebb útvonal hossza 284 km.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. b)		
Az autó benzinfogyasztása az úton $\frac{396}{100} \cdot 6{,}5 =$	1 pont	
$= 25{,}74$ liter.	1 pont	*25,7 vagy 26 liter is elfogadható.*
Ennek költsége kb. 11 000 Ft.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**3 pont**	

17. c) első megoldás		
(Az átlagsebességet v-vel jelölve a feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $\frac{396}{v} = \frac{396}{v+16} + 1$.	2 pont*	
$396(v+16) = 396v + v(v+16)$	2 pont*	
$v^2 + 16v - 6336 = 0$	1 pont	
$v_1 = -88$, $v_2 = 72$	1 pont	
(A negatív gyök nem megoldása a feladatnak, ezért) az átlagsebesség 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. c) második megoldás		
(Az út megtételéhez szükséges időt t-vel jelölve a feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $\frac{396}{t}+16=\frac{396}{t-1}$.	2 pont*	
$396(t-1)+16t(t-1)=396t$	2 pont*	
$16t^2-16t-396=0$	1 pont	$4t^2-4t-99=0$
$t_1=-4{,}5$, $t_2=5{,}5$	1 pont	
(A negatív gyök nem megoldása a feladatnak, ezért) az átlagsebesség $\frac{396}{5{,}5}=72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

(Az út megtételéhez szükséges időt t-vel, az átlagsebességet v-vel jelölve a feladat szövege alapján felírható egyenletrendszer:) $\left.\begin{array}{l} v\cdot t=396 \\ (v+16)(t-1)=396 \end{array}\right\}$.	2 pont	
A második egyenletben a zárójeleket felbontva és $v\cdot t$ helyére 396-ot helyettesítve: $16t-v-16=0$.	1 pont	
Ebből valamelyik ismeretlent kifejezve és a $v\cdot t=396$ egyenletbe helyettesítve:	1 pont	

18. a) **első megoldás**		
Egy 2-es és négy 9-es számjegyet tartalmazó kód 5 darab van,	1 pont	
egy 9-es és négy 2-es számjegyet tartalmazó kód szintén 5 darab van.	1 pont	
Két 2-es és három 9-es számjegyből álló kódok száma 10,	1 pont	
két 9-es és három 2-es számjegyből álló kódok száma szintén 10.	1 pont	
Ez összesen 30 megfelelő kód.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. a) **második megoldás**		
A megfelelő kódok számát megkapjuk, ha az összes lehetséges 2-es és 9-es számjegyet tartalmazó ötjegyű szám számából kivonjuk azok számát, amelyek nem tartalmazzák mindkét számjegyet.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
2-es és 9-es számjegyekből álló ötjegyű számok száma $2^5 =$	1 pont	
$= 32$.	1 pont	
Ebből 2 olyan van, amelyik nem tartalmazza mindkét számjegyet.	1 pont	
A megfelelő kódok száma 30.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b)		
Béla kódjának számjegyei lehetnek: 2, 3, 5 vagy 7.	1 pont	
A hattal való oszthatósághoz 2-vel és 3-mal is oszthatónak kell lennie a kódnak.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mivel kettővel osztható, ezért biztosan 2-re végződik.	1 pont	
Hárommal akkor lesz osztható, ha mellette a 3 és a 7 szerepel,	1 pont	
nagyság szerint csökkenő sorrendben.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Így a kérdéses kód a 732.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c) **első megoldás**		
A 3-as számjegyek helyét $\binom{6}{2}$-féleképpen tudjuk kiválasztani.	1 pont	
Ezután a 4-es számjegyek helyét $\binom{4}{2}$-féleképpen tudjuk kiválasztani.	1 pont	
A maradék két különböző számjegyet a fennmaradó két helyre kétféleképpen lehet elhelyezni.	1 pont	
Az összes lehetséges kódok száma ezek szorzata: $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 2=180$	1 pont	
A kedvező esetek száma 1.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{1}{180}=0,00\dot{5}$.	1 pont	*Más ésszerűen és helyesen kerekített érték, valamint százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

18. c) **második megoldás**		
Hat különböző számjegy összesen 6!-féleképpen sorakozhatna egymás után,	1 pont	*Ha a vizsgázó az ismétléses permutáció képletére hivatkozik, akkor ezek a pontok járnak.*
de az ismétlődő számjegyek megfelezik a lehetőségek számát,	1 pont	
kétszer is.	1 pont	
Így az összes a feltételeknek megfelelő kódok száma: 180.	1 pont	
A kedvező esetek száma 1.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{1}{180}=0,00\dot{5}$.	1 pont	*Más ésszerűen és helyesen kerekített érték, valamint százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	