ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. október 18.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
    - helyes lépés: *kipipálás*
    - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
    - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
    - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
    - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
    - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

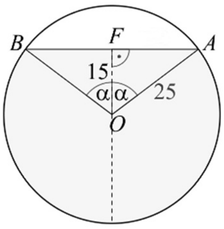
1. a)		
A feladat szövege szerint: $\frac{x+27}{2}=\sqrt{27x}+6$.	1 pont	
$x+15=2\sqrt{27x}$	1 pont	
$x^2+30x+225=108x$	1 pont	
$x^2-78x+225=0$	1 pont	
Az egyenlet két gyöke $x = 3$ és $x = 75$.	1 pont	
Ellenőrzés: 3 és 27 számtani közepe 15, mértani közepe 9; 75 és 27 számtani közepe 51, mértani közepe 45. Tehát mindkét szám megfelelő.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b)		
Az állítás igaz,	1 pont	
mert két különböző pozitív szám mértani közepe kisebb a számtani közepüknél.	2 pont	$\sqrt{27x}<\frac{27+x}{2}$ $0<(x-27)^2$, mert $x > 27$.
Összesen:	**3 pont**	

1. c)		
Az állítás megfordítása: Ha az x-nek és a 27-nek a mértani közepe kisebb a két szám számtani közepénél, akkor $x > 27$.	1 pont	
Az állítás hamis.	1 pont	
Egy megfelelő ellenpélda (bármelyik 27-nél kisebb pozitív valós szám).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. a)		
A henger magassága 8 dm, alapkörének sugara 2,5 dm.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó cm-ben számol, de a térfogatot jól számítja át literbe.*
$V=r^2\pi m=2{,}5^2\cdot\pi\cdot 8=50\pi\approx 157$ (dm^3),	1 pont	
azaz körülbelül 157 liter.	1 pont	
$A=2r\pi(r+m)=2\cdot 2{,}5\cdot\pi\cdot(2{,}5+8)=52{,}5\pi$, azaz körülbelül 165 dm^2.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés:
1. Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.
2. Ha a vizsgázó valamelyik válaszát mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

2. b)		
A térfogatok aránya helyett elegendő a nagyobbik körszelet és a teljes kör területének arányát megadni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
 Az ábra szerint az *OFA* derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{15}{25} = 0,6$.	2 pont	
Ebből $\alpha \approx 53,13^\circ$, tehát a nagyobbik körcikk középponti szöge $360^\circ - 2\alpha \approx 253,7^\circ$.	1 pont	
A nagyobbik körcikket körszeletté kiegészítő *AOB* egyenlő szárú háromszög alapja (dm-ben számolva): $AB = 2\cdot\sqrt{2,5^2 - 1,5^2} = 4$ (dm),	1 pont	$T_1 = \frac{2,5^2\cdot\sin 2\alpha}{2} =$
területe $T_1 = \frac{4\cdot 1,5}{2} = 3$ (dm^2).	1 pont	$= \frac{6,25\cdot 0,96}{2} = 3$ (dm^2).
A teljes kör területe $T = 2,5^2\pi \approx 19,63$ (dm^2),	1 pont*	
ezért a nagyobb körcikk területe $T_2 = \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ}\cdot 2,5^2\pi \approx 13,84$ (dm^2),	1 pont*	*A kisebb körcikk területe* $T_3 = \frac{2\alpha}{360^\circ}\cdot 2,5^2\pi \approx$ $\approx 5,80$ (dm^2).
a nagyobb körszelet területe $T_1 + T_2 \approx 16,84$ (dm^2).	1 pont*	$T - (T_3 - T_1)$
A betölthető víz térfogata $\frac{16,84}{19,63}\cdot 100 \approx 86$ százaléka a tartály térfogatának.	1 pont*	
Összesen:	**10 pont**	

Megjegyzés:

1. A vizsgázó teljes pontszámot kap, ha jól számítja ki a betölthető víz térfogatát (kb. 135 l), majd ennek és a henger térfogata arányának kiszámítása után helyesen adja meg a válaszát.

*2. A *-gal jelölt 4 pontot akkor is megkaphatja a vizsgázó, ha a körszelet és a kör területének értékét nem számítja ki, a keresett százalékértéket pedig a* $\frac{T_1 + T_2}{T} = \frac{\frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ}\cdot 2,5^2\pi + 3}{2,5^2\cdot\pi} =$ $= \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} + \frac{3}{6,25\pi} \approx 0,86$ *számítás segítségével határozza meg.*

3. Ha a vizsgázó az üresen maradó résznek és a teljes térfogatnak az arányát adja meg válaszként, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.

3. a)		
Az „egyharmados” előírás teljesüléséhez a napi 16 vonat közül legalább 6-nak pontosan (azaz 0 perces késéssel) kell indulnia.	1 pont	
A már elindított 14 vonat közül 5 a menetrendben előírt időpontban indult, tehát a két utolsó vonat közül legalább az egyiknek pontosan kell indulnia.	1 pont	
A másik vonat késése legyen x perc. A késések átlaga nem haladhatja meg a 3 percet: $\frac{0\cdot 6+1+3+4\cdot 2+5\cdot 2+6+7+8+x}{16}\le 3$.	1 pont	
$x\le 5$	1 pont	
A lehetséges (egész) értékek közül $x = 4$ és $x = 5$ esetén a medián nagyobb lenne 3-nál (mindkét esetben 3,5).	2 pont	
A másik vonat legfeljebb 3 percet késhet az indulásnál. (Ezekben az esetekben a medián valóban legfeljebb 3 lesz.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó szigorú egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.

3. b)		
$(209+p)\left(1-\frac{p}{100}\right)=189$	2 pont	
$(209+p)(100-p) = 18\ 900$	1 pont	
$p^2+109p-2000=0$	1 pont	
A másodfokú egyenlet két gyöke $p = 16$ és $p = -125$.	1 pont	
Ellenőrzés: Ha $p = 16$, akkor $209 + 16 = 225$, $225\cdot 0{,}84=189$. (A negatív gyök nem felel meg a feladat szövegének.)	1 pont	
Tehát $p = 16$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó próbálgatással (például kétoldali becslésekkel) találja meg a helyes megoldást, de nem bizonyítja, hogy más megoldása nincs a feladatnak, akkor 3 pontot kapjon.

4. a) **első megoldás**		
A lehetőségeket pl. az epres ízesítésű csokoládék száma alapján számolhatjuk össze.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha az epres ízesítésű csokoládék száma 5: akkor 1 lehetőség van; 4: akkor 2 lehetőség (0 vagy 1 lehet a málnás ízesítésű, és minden esetben a narancsos ízesítésűek száma már meghatározott); 3: akkor 3 (0, 1, 2); 2: akkor 4 (0, 1, 2, 3); 1: akkor 5 (0, 1, 2, 3, 4); 0: akkor 6 (0, 1, 2, 3, 4, 5) lehetőség van.	3 pont	
Összesen 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 lehetőség van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a) **második megoldás**		
(Háromféle csokoládéból öt darabot választunk ki úgy, hogy a kiválasztott csokoládék sorrendje nem számít, továbbá az egyes típusokat többször is kiválaszthatjuk.) A lehetőségek száma a háromféle ízesítés ötödosztályú ismétléses kombinációinak a száma,	2 pont	
azaz $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} =$	2 pont	
$= 21.$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felsorolja az összes lehetséges esetet (mindegyiket pontosan egyszer, továbbá hibás lehetőséget nem ad meg), majd ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

4. b)		
Tegyük fel, hogy n szelet csokoládét vásárolunk. (Ha a reklám állítása igaz, akkor) $0{,}999^n$ annak a valószínűsége, hogy mindegyik tömege legalább 100 g,	1 pont	
így annak valószínűsége, hogy közöttük van 100 g-nál kisebb tömegű: $1-0{,}999^n$.	1 pont	
A feltétel szerint $1-0{,}999^n \geq 0{,}05$, azaz $0{,}999^n \leq 0{,}95$.	1 pont	
A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, tehát: $n \lg 0{,}999 \leq \lg 0{,}95$.	1 pont	*A* 0,999 *alapú exponenciális (logaritmus) függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért*
(Mivel $\lg 0{,}999$ negatív, ezért:) $n \geq \frac{\lg 0{,}95}{\lg 0{,}999}$ $(\approx 51{,}3)$.	1 pont	$n \geq \log_{0{,}999} 0{,}95 (\approx 51{,}3)$.
Legalább 52 szelet csokoládét kell vásárolnunk.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel jól dolgozik, és ez alapján helyes választ ad, akkor 5 pontot kapjon. További 1 pontot akkor kaphat, ha utal arra, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik a kérdésre adott válasza (például a vásárolt csokoládészeletek számának növekedésével növekszik annak a valószínűsége is, hogy közöttük lesz 100 g-nál kisebb tömegű is).

II.

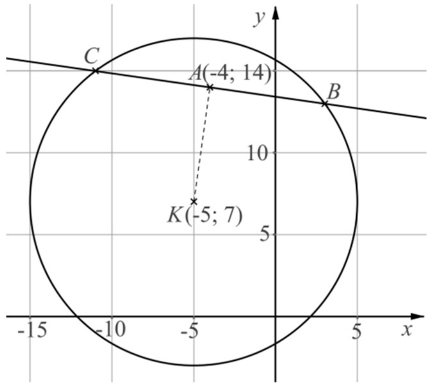
5. a)		
$x^2+y^2-2{,}8x+4{,}4y-2{,}2=0$	1 pont	
Átalakítva: $(x-1{,}4)^2+(y+2{,}2)^2=9$.	1 pont	
A kapott egyenletből következik, hogy a kör középpontja az (1,4; –2,2) pont, sugara pedig 3 egység.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b)		
$\overrightarrow{KA}=(-4;14)-(-5;7)=(1;7)$ a keresett egyenes egy normálvektora,	1 pont	
az egyenes egyenlete $x+7y=94$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. c) első megoldás		
$KA=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$	1 pont	
Az egyenes metszéspontjait a körrel jelölje *B* és *C*. A *KAC* derékszögű háromszögből $CA=\sqrt{r^2-KA^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}$.	2 pont	
A *KBC* háromszög egyenlő szárú, *KA* magassága ezért felezi a *CB* alapot.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból kerül ki.*
A húr hossza ezért *CB* = 2*CA* = $2\sqrt{50}$ (≈ 14,14).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) második megoldás		
A *k* egyenlete $(x+5)^2+(y-7)^2=100$, tehát az $\left.\begin{array}{r}(x+5)^2+(y-7)^2=100\\ x+7y=94\end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja a metszéspontokat.	1 pont	
A második egyenletből *x* = 94 – 7*y*, ezt az első egyenletbe behelyettesítve: $(99-7y)^2+(y-7)^2=100$.	1 pont	
$50y^2-1400y+9750=0$	1 pont	$y^2-28y+195=0$
Ebből $y_1=13$ és $y_2=15$, tehát az *e* egyenes és a *k* kör metszéspontjai: *B*(3; 13), *C*(–11; 15).	1 pont	
A húr hossza $CB=\sqrt{14^2+(-2)^2}=\sqrt{200}$ (≈ 14,14).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a b) feladatban rossz egyenletet kap, és a kapott egyenlettel, mint kiinduló adattal, a c) feladatban jól számol, akkor a megfelelő pontok járnak, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg (a felírt egyenlethez tartozó egyenes metszi a kört).



5. d)

<table>
<tr><td>(Mivel <i>K</i> rácspont, ezért) a körvonal egy <i>P</i> pontja pontosan akkor lesz rácspont, ha $\overrightarrow{KP}=(a;b)$ koordinátái egészek.</td><td>1 pont*</td><td><i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i></td></tr>
<tr><td>$a^2+b^2=100$, tehát a 100-at kell két négyzetszám összegére felbontani.</td><td>1 pont*</td><td></td></tr>
<tr><td>A lehetőségek:
<table>
<tr><td>a</td><td>0</td><td>±6</td><td>±8</td><td>±10</td></tr>
<tr><td>b</td><td>±10</td><td>±8</td><td>±6</td><td>0</td></tr>
</table></td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen (2 + 4 + 4 + 2 =) 12 rácspont van a körvonalon.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzés:

*1. A *-gal jelzett 2 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó: Azoknak az (x; y) rendezett számpároknak a számát keressük, amelyek kielégítik az* $(x+5)^2+(y-7)^2=100$ *egyenletet, továbbá x és y is egész szám.*

2. Ha a vizsgázó indoklás nélkül felsorolja a 12 rácspontot, és ez alapján válaszol, akkor ezért 3 pont jár. A rácspontok a következők: (−15; 7), (−13; 13), (−11; 15), (−5; 17), (1; 15), (3; 13), (5; 7), (3; 1), (1; −1), (−5; −3), (−11; −1), (−13; 1).

6. a) első megoldás

Vagy három olyan szerző könyvét viheti magával, akiktől 1-1 mű választható, vagy két könyvet választ ilyen szerzőtől, a harmadikat pedig attól, akinek 2 műve is választható.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első esetben $\binom{6}{3}$ (= 20)-féle,	1 pont	
a második esetben $\binom{6}{2}\cdot 2$ (= 30)-féle választási lehetősége van.	1 pont	
A választási lehetőségek száma az előző két érték összege, tehát 50.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. a) második megoldás		
Az összes eset számából levonjuk a kedvezőtlen esetek számát.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Kedvezőtlen esetek azok, amelyekben Andi azt a két könyvet is kiválasztja, amelyeknek azonos a szerzője. Ekkor a harmadik könyvet 6-féleképpen választhatja ki.	1 pont	
A nyolc könyvből összesen $\binom{8}{3}$(= 56)-féleképpen választhat ki hármat.	1 pont	
Összesen tehát (56 – 6 =) 50 választási lehetősége van Andinak.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. b) első megoldás		
Csak a nemek szerinti elrendezéseket tekintve négy jó sorrend van: LFLFLF, LFLFFL, LFFLFL és FLFLFL.	2 pont*	
Minden jó sorrenden belül a lányok és a fiúk is 3!(= 6)-féle sorrendben helyezkedhetnek el.	1 pont	
Összesen tehát $(4 \cdot 6 \cdot 6 =)$ 144-féleképpen ülhetnek le a feltételeknek megfelelően.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: Egy hiba (hiányzó, hibás vagy duplán említett lehetőség) esetén a *-gal jelölt 2 pontból 1 pontot, egynél több hiba esetén 0 pontot kapjon a vizsgázó.*

6. b) második megoldás		
A 3 fiú sorrendje 3!-féle lehet.	1 pont	
A 3 fiú 4 „köztes helyet” határoz meg (a közöttük lévő két hely, továbbá a három fiútól jobbra, illetve balra eső egy-egy hely), ezekből hármat választunk ki a lányok számára.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 3 lány a 4 helyre $4 \cdot 3 \cdot 2$-féleképpen ültethető le,	1 pont	
így a megfelelő sorrendek (ülésrendek) száma $(3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =)$ 144.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

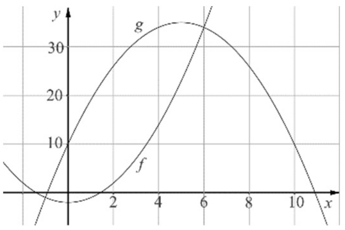
6. c)

A három egymás mellett ülő lányt egy egységnek tekintve ők és az *n* fiú (*n* + 1)!-féle sorrendben ülhetnek egymás mellé.	1 pont	
Mivel a három lány 3!(= 6)-féle sorrendben ülhet egymás mellett, a kedvező esetek száma összesen $3!\cdot(n+1)!$.	1 pont	
Az *n* + 3 személy (*n* + 3)!-féle különböző sorrendben ülhet le egymás mellé (összes eset száma).	1 pont	
Annak a valószínűsége tehát, hogy a három lány egymás mellett ül: $\frac{6\cdot(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{1}{26}$.	1 pont	
Egyszerűsítve: $\frac{6}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{26}$.	1 pont	
$n^2+5n-150=0$	1 pont	
Az egyenlet két gyöke *n* = 10 és *n* = –15.	1 pont	
A –15 nem megoldása a feladatnak, tehát csak *n* = 10 lehetséges (és ez valóban megfelelő).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. a)

Megoldandó a $\lvert 10x+8\rvert \geq 8$ egyenlőtlenség a valós számok halmazán.	1 pont	
(Az abszolútérték definíciója miatt) $10x+8\geq 8$, vagy	1 pont	
$10x+8\leq -8$,	1 pont	
tehát $x\geq 0$ vagy $x\leq -1{,}6$.	1 pont	*A megoldáshalmaz:*]–∞; –1,6] ∪ [0; +∞[.
Összesen:	**4 pont**	

7. b)

Az *f* függvény minimumhelye *x* = 0, a [2; 8] intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő.	1 pont	
f(2) = 2 (> 0)	1 pont	
$g(x)=-(x-5)^2+35$	1 pont	
A *g* függvény maximumhelye *x* = 5, az adott intervallumon felvett legkisebb értéke *g*(2) = *g*(8) = 26 (> 0),	1 pont	
így a függvények az adott intervallumon valóban csak pozitív értékeket vesznek fel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. c)		
(A [2; 8] intervallumon a függvényértékek pozitívak, így) $\int_2^t (x^2-2)\,dx=\int_t^8 (-x^2+10x+10)\,dx$.	1 pont	
$\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_2^t=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{10x^2}{2}+10x\right]_t^8$	2 pont	
$\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)-\left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2\right)=$ $=\left(-\frac{8^3}{3}+\frac{10\cdot 8^2}{2}+10\cdot 8\right)-\left(-\frac{t^3}{3}+\frac{10\cdot t^2}{2}+10\cdot t\right)$	2 pont	
$5t^2+8t-228=0$	1 pont	
A keresett szám az egyenlet [2; 8] intervallumba eső gyöke: t = 6. (t = –7,6 nem lehetséges.)	1 pont	$\int_2^6 (x^2-2)dx=\frac{184}{3}$ $\int_6^8 (-x^2+10x+10)dx=\frac{184}{3}$
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megmutatja, hogy a t = 6 megoldása a feladatnak, de nem igazolja, hogy más megoldás nincs, akkor 3 pontot kapjon.

8. a) első megoldás		
(Az eladott I., II. és III. kategóriás jegyek számát jelölje rendre a, b és c.) A feladat szövege szerint $a+b+\frac{2}{3}(a+b)=200$,	1 pont	
ahonnan $a + b = 120$.	1 pont	
A 120-at 9 : 11 arányban felosztva: $a = 54$ és $b = 66$.	2 pont	
c = (200 – 120 =) 80	1 pont	
Tehát I. kategóriás jegyből 54-et, II. kategóriásból 66-ot, III. kategóriásból pedig 80-at adtak el (így a feladat szövegének feltételei teljesülnek).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a) második megoldás

Az eladott I., illetve II. kategóriás jegyek száma a feladat szövege szerint $9x$, illetve $11x$,	1 pont	
a III. kategóriás jegyek száma pedig $\frac{2}{3}(9x+11x)$.	1 pont	
$20x+\frac{2}{3}\cdot 20x=200$	1 pont	
$x=6$	1 pont	
$9x=54,\ 11x=66,\ \frac{2}{3}(54+66)=80.$	1 pont	
Tehát I. kategóriás jegyből 54-et, II. kategóriásból 66-ot, III. kategóriásból pedig 80-at adtak el (így a feladat szövegének feltételei teljesülnek).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

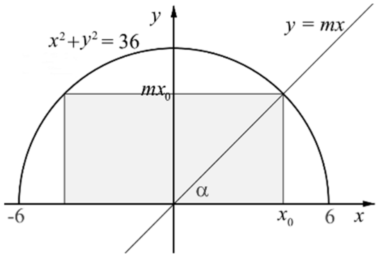
8. b) első megoldás

A téglalap oldalainak hossza (méterben): $6\sin\alpha$, illetve $12\cos\alpha$,	2 pont	
a téglalap területe pedig $72\sin\alpha\cos\alpha$ (m^2).	1 pont	
Keressük az f függvény maximumát, ha $f(\alpha)=72\sin\alpha\cos\alpha$ (és $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(f deriválható, és) $f'(\alpha)=72\cos^2\alpha-72\sin^2\alpha$.	1 pont*	
Az f-nek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0: $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$.	1 pont*	
($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ figyelembe vételével) $\mathrm{tg}^2\alpha=1$, amiből $\alpha=\frac{\pi}{4}$.	1 pont*	$45°$ *is elfogadható.*
Ezen a helyen az f' pozitívból negatívba megy át, tehát itt f-nek maximuma van.	1 pont*	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-144\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)$, *ami negatív.*
A maximális területű téglalap oldalainak hossza (méterben) $3\sqrt{2}$ ($\approx 4{,}24$), illetve $6\sqrt{2}$ ($\approx 8{,}49$),	1 pont	
a legnagyobb terület ($3\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=$) 36 m^2.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

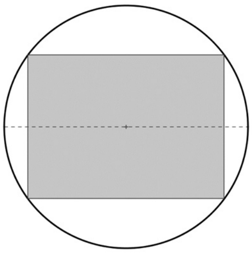
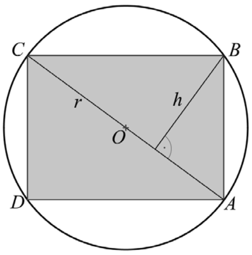
*A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin(2\alpha)$ azonosság miatt $f(\alpha)=36\sin(2\alpha)$.	1 pont	
Az f maximális, ha $\sin(2\alpha)$ maximális.	1 pont	
(Mivel $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ezért) $\alpha=\frac{\pi}{4}$.	2 pont	

8. b) második megoldás		
A téglalap oldalainak hossza (méterben): $6\sin\alpha$, illetve $12\cos\alpha$,	2 pont	
a téglalap területe pedig $72\sin\alpha\cos\alpha$ (m^2).	1 pont	
Két pozitív szám mértani és négyzetes közepe közötti egyenlőtlenség miatt:	1 pont	
$72\sin\alpha\cos\alpha \le 72\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2}$,	2 pont	
vagyis $72\sin\alpha\cos\alpha \le 72\cdot\frac{1}{2}=36$.	1 pont	
Egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha $\sin\alpha=\cos\alpha$.	1 pont	
Ekkor $\operatorname{tg}\alpha=1$, vagyis $\alpha=45°$.	1 pont	
Tehát a színpad maximális területe ($72\sin45°\cos45°=$) 36 m^2.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

8. b) harmadik megoldás		
 A tervrajzot helyezzük el az ábra szerint koordináta-rendszerben. A félkör egyenlete: $x^2+y^2=36$, ahol $y\ge0$, az origón átmenő, α irányszögű egyenes egyenlete pedig: $y=mx$, ahol $m=\operatorname{tg}\alpha$ és $m>0$.	1 pont	
Ez az egyenes a félkört az (x_0; mx_0) pontban metszi, tehát $x_0^2+m^2x_0^2=36$, ebből $x_0^2=\frac{36}{m^2+1}$.	1 pont	
A téglalap területe $t(m)=2x_0\cdot mx_0=2mx_0^2=$	1 pont	
$=72\cdot\frac{m}{m^2+1}$ ($m>0$).	1 pont	
$t'(m)=72\cdot\frac{m^2+1-2m^2}{(m^2+1)^2}=72\cdot\frac{1-m^2}{(m^2+1)^2}$	2 pont	
Szélsőérték ott lehet, ahol $t'(m)=0$, ahonnan ($m>0$ miatt) $m=1$.	1 pont	
Ezen a helyen a derivált pozitívból negatívba megy át, tehát a függvénynek itt maximuma van.	1 pont	
A legnagyobb terület: $\left(t(1)=72\cdot\frac{1}{1^2+1}=\right)$36 m^2,	1 pont	
az α szög ekkor 45°-os.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

8. b) negyedik megoldás

 Tükrözzük a félkört és a téglalapot is a félkör átmérőjének egyenesére, és egyesítsük a tükrözéssel kapott alakzatokat az eredetiekkel. (Egy téglalapot és ennek körülírt körét kapjuk; a kör átmérője 12 m.)	2 pont	
A legnagyobb területű színpadot akkor kapjuk, amikor a 12 m átmérőjű körbe írt téglalap területe (vagyis a színpad területének a kétszerese) a legnagyobb.	2 pont	
 Az ábra jelölése szerint: egy adott r sugarú körbe írt $ABCD$ téglalap területe $2rh$. Ez akkor a legnagyobb, ha a h maximális, vagyis $h = r$, azaz a téglalap négyzet.	2 pont*	
Ekkor a keresett szög $\alpha = 45°$,	2 pont	
a legnagyobb színpad területe pedig a négyzet területének a fele: 36 m^2.	2 pont	
Összesen:	**10 pont**	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó kijelenti, hogy az adott körbe írható legnagyobb területű téglalap a négyzet, de az állítását nem bizonyítja, akkor a *-gal jelölt 2 pontból 1 pontot kapjon.*

9. a)

A számtani sorozat tagjai az $5k + 4$ alakú számok, ahol $k \in \mathbf{N}$.	1 pont	
A sorozat 1000-nél kisebb tagjainak száma 200. (A legnagyobb megfelelő tag $k = 199$ esetén 999.)	1 pont	
A mértani sorozat tagjai $3 \cdot 2^{n-1}$ alakúak ($n \in \mathbf{N}^+$),	1 pont	
közöttük 9 olyan van, amelyik kisebb 1000-nél (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768).	1 pont	
A mértani sorozat $5k + 4$ alakú tagjai 4-re végződnek (a 9 végződés nem lehetséges), ezek a 24 és 384 (ez a két szám tehát mindkét sorozatnak tagja).	1 pont	
A két sorozatnak együtt összesen $200 + 9 - 2 = 207$ olyan tagja van, amely 1000-nél kisebb (kedvező esetek száma).	1 pont	
Az összes eset száma 999.	1 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{207}{999}$ ($\approx 0{,}207$),	1 pont	
ami a kért alakban $\frac{23}{111}$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

9. b) első megoldás		
Legyen a három teljes gráf pontjainak száma a, $a + d$, $a + 2d$, ahol a és d pozitív egész számok.	1 pont	*Legyen a három teljes gráf pontjainak száma* $a - d$, a, $a + d$, *ahol* a, d *pozitív egész számok,* $a > d$.
Az élek száma rendre $\frac{a(a-1)}{2}$, $\frac{(a+d)(a+d-1)}{2}$, $\frac{(a+2d)(a+2d-1)}{2}$.	1 pont	*Az élek száma rendre* $\frac{(a-d)(a-d-1)}{2}$, $\frac{a(a-1)}{2}$, $\frac{(a+d)(a+d-1)}{2}$.
Indirekt módon tegyük fel, hogy az élek száma egy számtani sorozat három szomszédos tagja! Ekkor (mivel a szomszédos tagok sorrendje megegyezik a megfelelő gráfok pontjai számának sorrendjével) $\frac{\frac{a(a-1)}{2}+\frac{(a+2d)(a+2d-1)}{2}}{2}=\frac{(a+d)(a+d-1)}{2}$.	1 pont	
$\frac{a^2-a+a^2+2ad-a+2ad+4d^2-2d}{2}=$ $=a^2+2ad+d^2-a-d$	1 pont	
$2a^2+4ad+4d^2-2a-2d=$ $=2a^2+4ad+2d^2-2a-2d$	1 pont	$2a^2+2d^2-2a=2a^2-2a$
$d=0$	1 pont	
Mivel a feladat szövege szerint $d > 0$, ezért ellentmondásra jutottunk. Tehát a három gráf éleinek száma nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő tagja.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. b) második megoldás		
Az $n + 1$ pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n+1)-n(n-1)}{2}$ = n-nel több, mint az n pontú teljes gráf éleinek száma.	2 pont	
Ennek alapján ha d egy pozitív egész szám, akkor az $n + d$ pontú teljes gráfnak $n+(n+1)+...+(n+d-1)=$	1 pont	
$=nd+\frac{d(d-1)}{2}$ -vel több éle van, mint az n pontú gráfnak,	1 pont	
az $n + 2d$ pontú teljes gráfnak pedig $(n+d)d+\frac{d(d-1)}{2}$ -vel több éle van, mint az $n + d$ pontú teljes gráfnak.	1 pont	
Mivel $d > 0$, ezért $(n + d)d$ $(=nd+d^2)$ nem lehet egyenlő nd-vel,	1 pont	
tehát a feladat állítása igaz.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	