ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. október 18.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

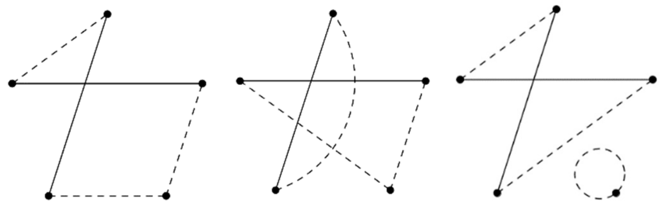
1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
Néhány lehetséges megoldás (nem csak egyszerű gráf fogadható el megoldásként): 	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
3	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
38 = 7 + 31	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a 38-at egy prím és egy nemprím összegeként írja fel, akkor 0 pontot kapjon. A 19 + 19 válaszért 1 pont jár.

4.		
$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =)$ 120 ilyen szám van.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe, hogy a szám különböző számjegyekből áll, és így a válasza $(5^4 =)$ 625, *akkor 1 pontot kapjon. Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe, hogy a szám páratlan számjegyekből áll, és így a válasza* $(9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 =)$ 4536, *akkor 1 pontot kapjon.*

5.		
A) hamis B) hamis C) igaz	2 pont	*Két jó válasz esetén 1, egy jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

6. első megoldás		
(A kisebb henger alapkörének sugara r, magassága m, a nagyobb henger megfelelő adatai: $2r$ és $2m$.) A kisebb henger térfogata $r^2\pi \cdot m$,	1 pont	
a nagyobb henger térfogata $(2r)^2\pi \cdot 2m$ =	1 pont	
$= 8r^2\pi \cdot m$.	1 pont	
Tehát a nagyobb mérőhenger térfogata 8-szorosa a kisebb mérőhenger térfogatának.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. második megoldás		
A két henger hasonló, a hasonlóság aránya $1:2$.	2 pont	
A térfogatuk aránya (a hasonlóság arányának köbe, tehát) $1:8$.	1 pont	
Tehát a nagyobb mérőhenger térfogata 8-szorosa a kisebb mérőhenger térfogatának.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó konkrét adatokkal számol, és helyes választ ad, akkor 3 pontot kapjon. Ha a vizsgázó leírja, hogy a konkrét adatok választása nem megy az általánosság rovására, akkor teljes pontszámot kapjon.

7.		
[–1; 3]	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

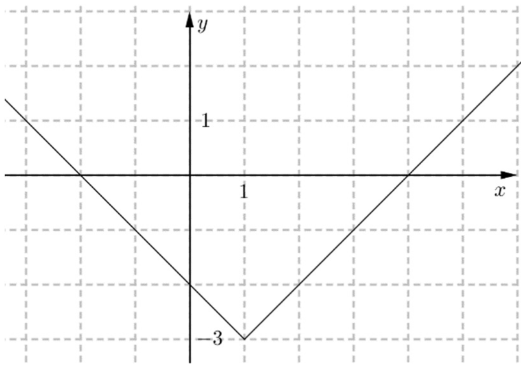
8.		
$\frac{\pi}{6}$	1 pont	
$\frac{5\pi}{6}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó válasza 30° és 150°, akkor 1 pontot kapjon. Ha a vizsgázó valós számként adja meg az egyenlet megoldásait, de nem veszi figyelembe a megadott intervallumot, akkor legfeljebb 1 pontot kapjon.

9. első megoldás		
A 8 km 40%-a 3,2 km.	1 pont	
A még hátralévő út hossza 8 – 3,2 – 1,2 = 3,6 (km).	1 pont	
$\frac{3,6}{8} = 0,45$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 8 km-nek a 45%-a van még hátra.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. második megoldás		
1200 méter a 8000 méternek a 15%-a.	2 pont	
Eddig a teljes út (15 + 40 =) 55%-át tették meg.	1 pont	
A 8 km-nek a 45%-a van még hátra.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

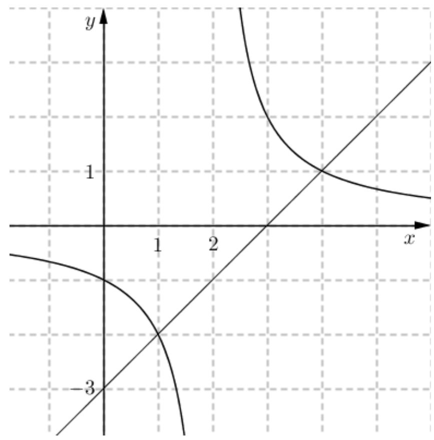
10.		
$(\log_6(2\cdot 3) =)\ 1$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
Az *f* függvény grafikonja: 	1 pont	$0 = \lvert x-1 \rvert - 3$
	1 pont	$x-1=3$ vagy $x-1=-3$
A zérushelyek: 4	1 pont	
és –2.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
D	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

II. A

13. a) első megoldás		
$2=(x-2)(x-3)$	1 pont	
$2=x^2-2x-3x+6$	1 pont	
$x^2-5x+4=0$	1 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1=1$, $x_2=4$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az értelmezési tartomány ($x \neq 2$) feltüntetése mellett ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

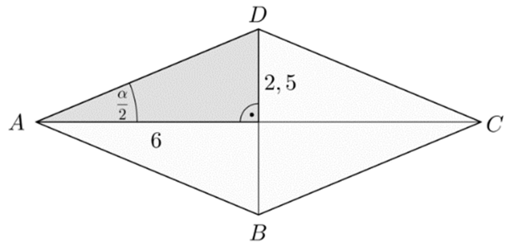
13. a) második megoldás		
Az $x \mapsto \frac{2}{x-2}$ $(x \neq 2)$ függvény helyes ábrázolása.	2 pont	
Az $x \mapsto x-3$ függvény helyes ábrázolása ugyanabban a koordináta-rendszerben.	1 pont	
A metszéspontok első koordinátái: $x_1=1$, $x_2=4$.	2 pont	
A kapott értékek ellenőrzése behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

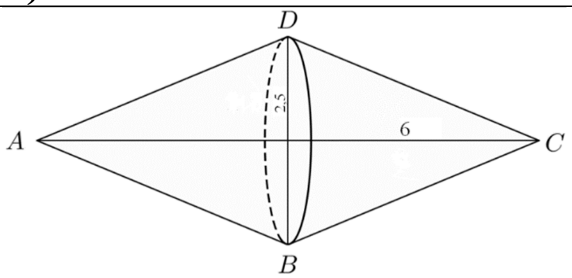
13. b)		
$9\cdot 9^x-7\cdot 9^x=54$	1 pont	
$2\cdot 9^x=54$	1 pont	
$9^x=27$	1 pont	
$3^{2x}=3^3$	1 pont	$x=\log_9 27$
(Mivel a 3-as alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $x=1,5$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a)		
Az egymást követő hetek során lefutott, kilométerben mért távolságok egy számtani sorozat (egymást követő) tagjai. Az 1. tag a 15, a 11. tag a 60.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A számtani sorozat d differenciájára: $15 + 10d = 60$.	1 pont	
Ebből $d = 4,5$.	1 pont	
Andrea minden héten 4,5 kilométerrel fut többet, mint az azt megelőző héten.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. b)		
$S_{11} = \frac{15+60}{2} \cdot 11 =$	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó helyesen felírja az egyes heteken lefutott kilométerek számát.*
$= 412,5$ kilométert futott Andrea a 11 hét alatt összesen.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

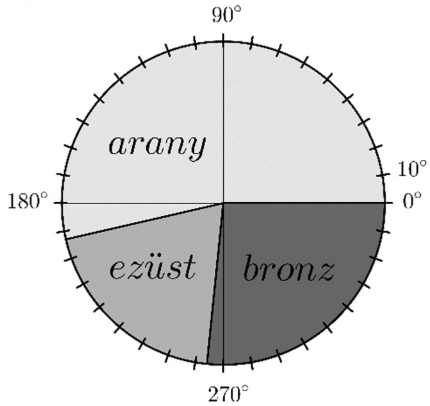
14. c)		
Ha Gabi minden héten p százalékkal növeli a lefutott táv hosszát, akkor azt minden héten ugyanannyi-szorosára ($q = 1 + \frac{p}{100}$ -szorosára) növeli.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó megoldása kevésbé részletezett.*
Az egymást követő hetek során lefutott, kilométerben mért távolságok egy mértani sorozat (egymást követő) tagjai. Az 1. tag a 15, a 11. tag a 60.	1 pont	
A mértani sorozat q hányadosára: $15 \cdot q^{10} = 60$.	1 pont	
Ebből $q \approx 1,15$ (mert $q > 0$).	1 pont	
Gabi minden héten kb. 15%-kal fut többet, mint az azt megelőző héten.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. a)		
 (A rombusz átlói szögfelezők, és merőlegesen felezik egymást.)	1 pont	
Az A csúcsnál lévő belső szöget α-val jelölve $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2,5}{6}$ $(\approx 0,4167)$,	1 pont	
amiből $\frac{\alpha}{2}\approx 22,6°$.	1 pont	
Így a rombusz A és C csúcsánál lévő szögeinek nagysága kb. 45,2°,	1 pont	
a B és D csúcsnál lévő szögek nagysága pedig kb. 134,8°.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

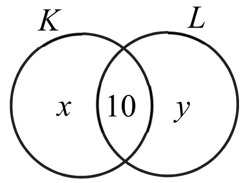
15. b)		
 A keletkező forgástestet két, közös alapkörrel rendelkező, egybevágó forgáskúp alkotja.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Egy kúp alapkörének sugara 2,5 cm, magassága 6 cm.	1 pont	
(A kúpok alkotójának hossza a rombusz egy oldalának hosszával egyenlő, amit a-val jelölve a Pitagorasz-tétellel felírható:) $2,5^2+6^2=a^2$.	1 pont	
Ebből a = 6,5 (cm).	1 pont	
Egy kúp felszíne $2,5^2\cdot\pi+2,5\cdot\pi\cdot 6,5\,(=22,5\pi\approx 70,7\text{ cm}^2)$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a kúp felszínének kiszámítása nélkül jó választ ad.*
(A forgástest felszínét megkapjuk, ha a két kúp felszínéből az alapkörök területét levonjuk:) $A=2\cdot 22,5\pi-2\cdot 2,5^2\cdot\pi=$	1 pont	$A=2\cdot 2,5\cdot\pi\cdot 6,5$
$=32,5\pi\approx 102,1\text{ cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a rombusz BD átlóegyenese körüli forgatással keletkező test felszínét számolja ki ($2\cdot 6\cdot\pi\cdot 6,5=78\pi\approx 245\text{ cm}^2$)*, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.*

II. B

16. a)		
Összesen 15 érmet szerzett a magyar csapat, így egy éremnek 24°-os körcikk felel meg az ábrán.	1 pont	
Az aranyérmek számát egy 192°-os körcikk, az ezüstérmek számát egy 72°-os körcikk, a bronzérmek számát pedig egy 96°-os körcikk szemlélteti.	1 pont	
Egy lehetséges ábrázolás: 	2 pont	*1 pont jár a megfelelő középponti szögű körcikkek berajzolásáért, valamint 1 pont jár az egyértelmű jelmagyarázatért.*
Összesen:	**4 pont**	

16. b) első megoldás		
Jelölje x azok számát, akik csak a női kajak négyesek olimpiai döntőjét nézték. Ekkor a labdarúgó Eb döntőjét $32 - x$ fő nézte,	1 pont	
a női kajak négyesek olimpiai döntőjét pedig $10 + x$ fő.	1 pont	
A feladat szövege alapján $2 \cdot (32 - x) = 10 + x$,	1 pont	
ahonnan $x = 18$.	1 pont	
18 fő nézte csak a női kajak négyesek olimpiai döntőjét (és 4 fő nézte csak a labdarúgó Eb döntőjét).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b) **második megoldás**		
Jelölje x azok számát, akik csak a női kajak négyesek olimpiai döntőjét, y pedig azok számát, akik csak a labdarúgó Eb döntőjét nézték. Ekkor egyrészt $x + 10 + y = 32$,	1 pont	
másrészt a feladat szövege alapján: $x + 10 = 2(y + 10)$.	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 18$ és $y = 4$.	2 pont	
18 fő nézte csak a női kajak négyesek olimpiai döntőjét (és 4 fő nézte csak a labdarúgó Eb döntőjét).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b) **harmadik megoldás**		
Ha a női kajak négyesek olimpiai döntőjét, illetve a labdarúgó Eb döntőjét követők számát összeadjuk, akkor a mindkét sportrendezvényt követőket kétszer vettük számításba,	1 pont	
ezért az összeg az osztálylétszámnál 10-zel több lesz: 42.	1 pont	
Ezt 2 : 1 arányban felosztva megkapjuk a kajak négyesek döntőjét, illetve az Eb-döntőt követő tanulók számát,	1 pont	
ami rendre 28, illetve 14.	1 pont	
Csak a női kajak négyesek olimpiai döntőjét tehát $28 - 10 = 18$ tanuló nézte.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. c)		
Péternek pontosan öt találata (a magyarok helyezésén kívül) egyféleképpen lehet.	1 pont	
Pontosan négy találata nem lehet, mert akkor az ötödik tippje is helyes lenne.	1 pont	
Pontosan három találata akkor lehet, ha valamelyik három nemzet helyezését eltalálja, a maradék két nemzet helyezését pedig felcseréli.	1 pont	
Ez $\binom{5}{3} \cdot 1 =$	1 pont	
= 10-féleképpen lehetséges.	1 pont	
A kedvező esetek száma így $1 + 10 = 11$.	1 pont	
Az öt nemzetnek összesen 5! (= 120) helyezési sorrendje van.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{11}{120} \approx 0{,}092$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. a)		
Az e egyenes egyik normálvektora az $\mathbf{n}(1; 2)$.	1 pont	$y = -\frac{1}{2}x + 6{,}5$
Az egyenes meredeksége $-\frac{1}{2}$.	1 pont	
Az egyenes egyenletébe $x = 0$-t helyettesítve	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$y = 6{,}5$, tehát az egyenes az y tengelyt a $(0; 6{,}5)$ pontban metszi.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
A k kör egyenlete átrendezve: $x^2 + (y+1)^2 = 45$.	1 pont	
A kör középpontja a $(0; -1)$ pont,	2 pont	
sugara $\sqrt{45}$ ($\approx 6{,}71$) (egység).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c) **első megoldás**		
Igazoljuk, hogy a k kör és az e egyenes egyenletéből álló egyenletrendszernek egy megoldása van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az egyenes egyenlete átalakítva $x = 13 - 2y$.	1 pont	$y = -\frac{1}{2}x + 6{,}5$
Ezt a kör egyenletébe helyettesítve: $(13-2y)^2 + (y+1)^2 - 45 = 0$.	1 pont	$x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 7{,}5\right)^2 - 45 = 0$
$169 - 52y + 4y^2 + y^2 + 2y + 1 - 45 = 0$	2 pont	$x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 7{,}5x + 56{,}25 - 45 = 0$
$5y^2 - 50y + 125 = 0$	1 pont	$1{,}25x^2 - 7{,}5x + 11{,}25 = 0$
Ebből $y = 5$	1 pont	$x = 3$
és $x = 3$.	1 pont	$y = 5$
Az egyenletrendszernek egy megoldása van, így az e egyenesnek valóban egy közös pontja van a k körrel.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

17. c) **második megoldás**		
Igazoljuk, hogy az e egyenes érinti a k kört, vagyis a k középpontjának és az e-nek a távolsága a k sugarával egyenlő.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A k kör O középpontján át az e-re állított merőleges egyenes egyenlete: $2x - y = 1$.	2 pont*	
A két egyenes metszéspontjának koordinátáit az $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 13 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldásával kapjuk.	1 pont*	
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 3$ és $y = 5$, tehát a két egyenes metszéspontja az $M(3; 5)$ pont.	2 pont*	
Az OM szakasz hossza (azaz a k kör középpontjának és az e egyenesnek a távolsága) $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$.	1 pont	
Ez éppen a k kör sugarával egyenlő, így az e egyenes valóban érinti a kört.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pont jár, ha a vizsgázó a k kör középpontjának és az e egyenesnek a távolságát a megfelelő képlet helyes alkalmazásával számítja ki.*

18. a)		
Az adatok átlaga $\frac{35+40+51+55+62+67+72+84+92}{9} =$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
= 62 pont.	1 pont	
Az adatok szórása $\sqrt{\frac{27^2+22^2+11^2+7^2+0+5^2+10^2+22^2+30^2}{9}} \approx$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
≈ 17,9 pont.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b) **első megoldás**		
Kilenc dolgozat közül hármat $\binom{9}{3} = 84$-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	2 pont	
Öt olyan dolgozat van, aminek a pontszáma legalább 60.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

Vagy ebből az ötből választ hármat $\binom{5}{3}$(= 10)-féleképpen,	1 pont	
vagy ebből az ötből választ kettőt és a másik négyből egyet, amit $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$(= 40)-féleképpen tehet meg.	2 pont	
A kedvező esetek száma: (10 + 40 =) 50.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{50}{84} \approx 0{,}595$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. b) második megoldás		
(Vizsgáljuk a komplementer eseményt, amikor 0 vagy 1 dolgozat pontszáma lesz legalább 60 pontos.) Öt dolgozat pontszáma legalább 60 pont, négy dolgozaté pedig kevesebb 60 pontnál.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A négy dolgozatból hármat választani $\binom{4}{3}$(= 4)-féleképpen,	1 pont	
a négyből kettőt és a másik ötből egyet választani $\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}$(= 30)-féleképpen lehet.	2 pont	
A kedvező esetek száma: (4 + 30 =) 34.	1 pont	
Kilenc dolgozat közül hármat $\binom{9}{3}$ = 84-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	2 pont	
A kérdéses valószínűség $1-\frac{34}{84} \approx 0{,}595$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. c)		
Az egyik dolgozat 64 pontos (mert az adatok száma páratlan).	1 pont	
Az először kijavított kilenc dolgozat pontszámának összege 558,	1 pont	
ehhez jön még 64 pont: 622 pont.	1 pont	
A 11 dolgozat pontszámának összege $11\cdot 65 = 715$.	1 pont	
A 11. dolgozat pontszáma tehát (715 – 622 =) 93 (ami megfelel, mert $93 \ge 64$, így a medián valóban 64).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	