

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. május 3.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

### **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
  - helyes lépés: *kipipálás*
  - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
  - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
  - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
  - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
  - nem érthető rész: *kérdőjel és/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

- 
6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
  7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészeire előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
  8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
  9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
  10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
  11. **Valószínűsége** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
  12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
  13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

**Figyelem!** Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

### I.

| <b>1. a) első megoldás</b>  |               |  |
|---|---------------|--|
| Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:<br>$\frac{4x^2 + 44x + 121}{9} = x^2 + 6x + 9.$ | 2 pont        |  |
| $x^2 + 2x - 8 = 0$  | 2 pont        |  |
| $x = 2$ vagy $x = -4$ .   | 1 pont        |  |
| A gyökök behelyettesítése után azt kapjuk, hogy mindkettő megoldása az egyenletnek.           | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>6 pont</b> |  |

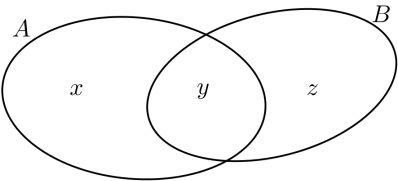
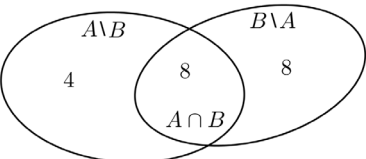
| <b>1. a) második megoldás</b>                                     |               |  |
|---|---------------|--|
| $\frac{2x+11}{3} =  x+3 $   | 1 pont        |  |
| Ha $x \geq -3$ , akkor az egyenlet: $\frac{2x+11}{3} = x+3$ ,     | 1 pont        |  |
| amiből $x = 2$ (ez valóban nem kisebb $-3$ -nál).                 | 1 pont        |  |
| Ha $x < -3$ , akkor az egyenlet: $\frac{2x+11}{3} = -x-3$ ,       | 1 pont        |  |
| amiből $x = -4$ (ez valóban kisebb mint $-3$ ).                   | 1 pont        |  |
| Ellenőrzés: ekvivalenciára hivatkozással vagy behelyettesítéssel. | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>6 pont</b> |  |

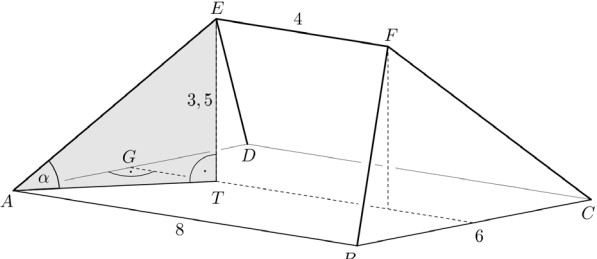
| <b>1. b)</b>  |               |   |
|---|---------------|---|
| $x > 3$   | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldás helyességét.</i> |
| (A logaritmus azonosságait és definícióját használva.)<br>$\log_2 \frac{(x+1)(x-3)}{x+9} =$   | 1 pont        |   |
| $= \log_2 2$  | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a következő lépésből derül ki.</i>               |
| (A logaritmus kölcsönös egyértelműsége miatt.)<br>$\frac{(x+1)(x-3)}{x+9} = 2$  | 1 pont        |   |
| Rendezve: $x^2 - 4x - 21 = 0$ .   | 1 pont        |   |
| A másodfokú egyenlet gyökei 7 és $-3$ .   | 1 pont        |   |
| Ellenőrzés: a $-3$ nem, a 7 viszont megoldása az eredeti egyenletnek (behelyettesítéssel vagy az értelmezési tartományra és ekvivalens átalakításokra hivatkozással). | 1 pont        |   |
| <b>Összesen:</b>  | <b>7 pont</b> |   |

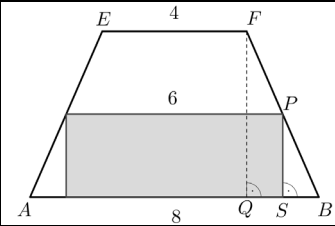
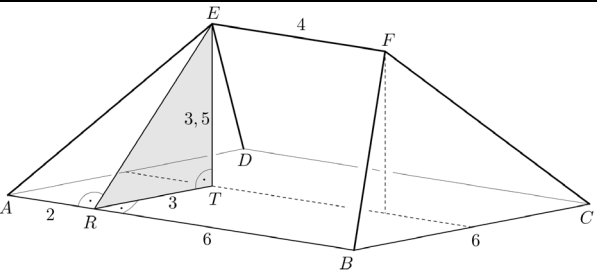
|   |               |  |
|---|---------------|--|
| <b>2. a) első megoldás</b>  |               |  |
| 5 tanulóknak van jelese fizikából,  | 1 pont        |  |
| és 7 tanulóknak van jelese matematikából.   | 1 pont        |  |
| $5 + 7 = 12$ , de csak 10 tanulóknak van legalább az egyik tárgyból jelese, ezért | 1 pont        |  |
| mindkét tárgyból 2 tanulóknak van jelese.   | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>4 pont</b> |  |

|   |               |  |
|---|---------------|--|
| <b>2. a) második megoldás</b>   |               |  |
| (Ha mindkét tárgyból $x$ tanulóknak van jelese, akkor) csak fizikából $5 - x$ , | 1 pont        |  |
| csak matematikából $7 - x$ tanulóknak van jelese.                               | 1 pont        |  |
| $5 - x + x + 7 - x = 10$  | 1 pont        |  |
| $x = 2$ , azaz mindkét tárgyból 2 tanulóknak van jelese.                        | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>4 pont</b> |  |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen felvett és kitöltött halmazábra segítségével adja meg a helyes eredményt, akkor teljes pontszámot kapjon.*

|  |               |  |
|--|---------------|--|
| <b>2. b)</b>   |               |  |
| Készítsünk Venn-diagramot!   |               |  |
|  <p>(<math>x, y, z</math> rendre az <math>A \setminus B</math>, az <math>A \cap B</math>, illetve a <math>B \setminus A</math> halmaz elemeinek számát jelöli).</p> | 1 pont        |  |
| A számtani sorozat első tagja $x$ , második tagja $y$ , harmadik tagja pedig $x + y$ , ezért   | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| a számtani sorozat differenciája $(x + y) - y = x$ .   | 1 pont        |  |
| Az $A$ halmaz elemeinek száma tehát $3x$ , a $B$ halmazé pedig (a sorozat 4. tagja) $4x$ .   | 1 pont        |  |
| Az $A$ és $B$ elemszámának összege 28, ezért $3x + 4x = 28$ .  | 1 pont        |  |
| A számtani sorozat első tagja és differenciája is 4.   | 1 pont        |  |
| Ellenőrzés:<br>A $B$ halmaz elemszáma 16 (ezért $z = 8$ ).   |               |  |
|  <p><math> A \setminus B  = 4,  A \cap B  = 8,  A  = 12,  B  = 16</math>.<br/>Ez a négy szám valóban egy számtani sorozat négy egymást követő tagja.</p>            | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>   | <b>7 pont</b> |  |

|   |               |  |
|---|---------------|--|
| <b>3. a)</b>  |               |  |
|  <p>(Használjuk az ábra jelöléseit!) Az <math>ATG</math> derékszögű háromszögben <math>GT = 2</math> m és <math>AG = 3</math> m,</p> | 1 pont        |  |
| <p>így (a Pitagorasz-tételt alkalmazva)</p> $AT = \sqrt{13} (\approx 3,61)$ (m).  | 1 pont        | $GE = \sqrt{3,5^2 + 2^2} = \sqrt{16,25} (\approx 4,03)$ (m)                  |
| <p>(Az <math>ATE</math> derékszögű háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt) <math>AE = \sqrt{AT^2 + ET^2} =</math></p>   | 1 pont        | $AE = \sqrt{GE^2 + GA^2}$  |
| <p><math>= \sqrt{25,25} \approx 5</math> (m) a tartógerenda hossza.</p>   | 1 pont        |  |
| <p>A tartógerenda vízszintessel bezárt szöge az ábrán <math>\alpha</math>-val jelölt <math>EAT</math> szög,</p>   | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| <p>amelyre <math>\sin \alpha = \frac{ET}{AE} (\approx 0,6965)</math>,</p>   | 1 pont        |  |
| <p>ahonnan <math>\alpha \approx 44^\circ</math>.</p>  | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>7 pont</b> |  |

|   |        |  |
|---|--------|--|
| <b>3. b)</b>  |        |  |
| <p>A téglalap alakú napelem egyik oldalának hossza legfeljebb a trapéz középvonalának hossza lehet,</p>   | 1 pont | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>   |
| <p>azaz 6 méter.</p>  | 1 pont |  |
| <p>A téglalap másik oldalának hossza állandó, mert az a trapéz magasságának a fele (az ábrán <math>PS</math> az <math>FQB</math> derékszögű háromszög középvonala).</p>   | 1 pont |   |
|  <p>(Használjuk az ábra jelöléseit!) A trapéz magasságát az <math>ETR</math> derékszögű háromszögből számítva:</p> $ER = \sqrt{ET^2 + TR^2} = \sqrt{3,5^2 + 3^2} = \sqrt{21,25} (\approx 4,61)$ (m). | 1 pont | <p>(A fenti ábra jelöléseit használva:)</p> $PS = \sqrt{PB^2 - SB^2} = \sqrt{6,3125 - 1} = \sqrt{5,3125} (\approx 2,30)$ (m) |

|  |               |   |
|--|---------------|---|
| A legnagyobb napelem területe:<br>$\frac{6 \cdot \sqrt{21,25}}{2} (\approx 13,83) (\text{m}^2).$ | 1 pont        | <i>A legnagyobb napelem területe:</i><br>$6 \cdot \sqrt{5,3125} (\approx 13,83) (\text{m}^2)$ |
| Legfeljebb $13,8 \text{ m}^2$ területű napelem helyezhető el.                                    | 1 pont        | <i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgáló nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>                     |
| <b>Összesen:</b>   | <b>6 pont</b> |   |

**4. a)**

|  |               |  |
|--|---------------|--|
| A jegybevétel 1500 Ft-os ár és 1000 néző esetén 1 500 000 Ft.  | 1 pont        |  |
| Ha $n$ -szer 5 forinttal növeljük a jegy árát ( $n \in \mathbf{N}^+$ ), akkor (a modell szerint) a nézők száma $1000 - 10n$ fő lesz. | 1 pont        |  |
| A módosult bevétel $(1500 + 5n)(1000 - 10n) =$   | 1 pont        |  |
| $= 1\,500\,000 - 10\,000n - 50n^2$ forint,   | 1 pont        |  |
| ami kevesebb, mint 1 500 000 forint,   | 1 pont*       |  |
| mert pozitív értékű tagokat vonunk le belőle.  | 1 pont*       |  |
| <b>Összesen:</b>   | <b>6 pont</b> |  |

*A \*-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgáló:*

|   |        |  |
|---|--------|--|
| Ha $b$ a pozitív valós számok halmazán értelmezett $b(n) = -50n^2 - 10\,000n + 1\,500\,000$ „bevétel-függvény”, akkor $b'(n) = -100n - 10\,000$ .                               | 1 pont |  |
| A deriváltfüggvény a teljes értelmezési tartományon negatív, tehát a $b$ függvény szigorúan monoton csökkenő (ilyen tehát a pozitív egészek halmazára leszűkített függvény is). | 1 pont |  |

**4. b)**

|   |               |  |
|---|---------------|--|
| Ha $m$ -szer 5 Ft-tal csökkentjük a jegy árát, akkor a nézők száma $1000 + 10m$ fő lesz ( $m \in \mathbf{Z}$ ). | 1 pont        |  |
| A módosult bevétel $(1500 - 5m)(1000 + 10m) =$  | 1 pont        |  |
| $= 1\,500\,000 + 10\,000m - 50m^2$ (Ft).  | 1 pont        |  |
| Teljes négyzetté alakítva:<br>$-50(m - 100)^2 + 2\,000\,000$ , tehát  | 2 pont*       |  |
| $m = 100$ a maximumhely.  | 1 pont*       |  |
| Ekkor a jegy ára $(1500 - 100 \cdot 5 =) 1000$ Ft.  | 1 pont        |  |
| A legnagyobb bevétel $(1000 \cdot 2000 =) 2\,000\,000$ Ft.  | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>8 pont</b> |  |

*A \*-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetek valamelyikéért is megkaphatja a vizsgázó:*

|  |        |  |
|--|--------|--|
| Ha $f$ a valós számok halmazán értelmezett<br>$f(m) = -50m^2 + 10\,000m + 1\,500\,000$ „bevételefüggvény”, akkor $f'(m) = -100m + 10\,000$ . | 1 pont |  |
| Ha $f'(m) = 0$ , akkor $m = 100$ .   | 1 pont |  |
| Mivel $f''(m) = -100 < 0$ , ezért a 100 valóban maximumhelye $f$ -nek (és így az egész számok halmazára leszűkített függvénynek is).         | 1 pont | <i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol helyesen.</i> |

|  |        |  |
|--|--------|--|
| Ha $f$ a valós számok halmazán értelmezett<br>$f(m) = -50m^2 + 10\,000m + 1\,500\,000$ „bevételefüggvény”, akkor $f$ zérushelyei a 300 és a $-100$ . | 1 pont |  |
| $f$ -nek maximuma van, és ezt a zérushelyeinek számtani közepénél veszi fel.   | 1 pont |  |
| Az $f$ maximumhelye tehát a 100. Ez egyben a bevétel maximumhelye is.  | 1 pont |  |

## II.

|   |               |   |
|---|---------------|---|
| <b>5. a) első megoldás</b>  |               |   |
| Az első gépsoron 80, a második gépsoron 170 hibás inget gyártanak.                                    | 1 pont        |   |
| (Hibás inget 250 ing közül választhatunk, tehát) az összes eset száma 250.                            | 1 pont        | <i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i> |
| (Második gépsoron készült hibás inget 170 ing közül választhatunk, tehát) a kedvező esetek száma 170. | 1 pont        |   |
| Így a kérdéses valószínűség $\frac{170}{250} =$   | 1 pont        |   |
| $= 0,68$ .  | 1 pont        | <i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>                           |
| <b>Összesen:</b>  | <b>5 pont</b> |   |



| <b>5. a) második megoldás</b>   |               |   |
|---|---------------|---|
| Az első gépsoron 80, a második gépsoron 170 hibás inget gyártanak.  | 1 pont        |   |
| Jelölje $A$ azt az eseményt, hogy a kiválasztott inget a második gépsoron gyártották, $B$ pedig azt az eseményt, hogy a kiválasztott ing anyaghibás. Ezekkel a keresett valószínűség: $P(A B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ . | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki.</i> |
| $P(AB) = \frac{170}{9000} = \frac{17}{900}$   | 1 pont        |   |
| $P(B) = \frac{250}{9000} = \frac{25}{900}$  | 1 pont        |   |
| $P(A B) = \frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}} = \frac{17}{25} = 0,68$   | 1 pont        | <i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>                     |
| <b>Összesen:</b>  | <b>5 pont</b> |   |

| <b>5. b)</b>  |                |   |
|---|----------------|---|
| Legyen $x$ az ing árleszállítás előtti ára forintban, és legyen $q = 1 - \frac{p}{100}$ .   | 1 pont         |   |
| (Ha a két árleszállítás fordított sorrendben történt volna, akkor az ing kétszeres árleszállítás utáni ára $xq - 500$ forint, tehát)<br>$(xq - 500) + 50 = (x - 500) \cdot q$ .   | 2 pont         |   |
| (Ha mindkét alkalommal $p\%$ a csökkentés, akkor az új ár $xq^2$ forint, tehát)<br>$(x - 500) \cdot q + 90 = xq^2$ .  | 2 pont         |   |
| Az első egyenletből $q = 0,9$ ,   | 1 pont         |   |
| azaz $p = 10$ .   | 1 pont         |   |
| (A $q$ értékét a második egyenletbe helyettesítve)<br>$(x - 500) \cdot 0,9 + 90 = x \cdot 0,81$ .   | 1 pont         |   |
| $x = 4000$  | 1 pont         |   |
| Az ing eredeti ára 4000 Ft, $p$ értéke pedig 10.  | 1 pont         |   |
| Ellenőrzés:<br>4000 – 500 = 3500, 10%-kal csökkentve 3150;<br>4000 csökkentve 10%-kal 3600, 3600 – 500 = 3100;<br>4000 csökkentve 10%-kal 3600, újabb 10%-kal csökkentve 3240.<br>3150 = 3100 + 50 és 3150 = 3240 – 90, tehát a kapott eredmények helyesek. | 1 pont         | <i>Ez a pont csak akkor jár, ha a vizsgázó a feladat szövegébe történő behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldások helyességét.</i> |
| <b>Összesen:</b>  | <b>11 pont</b> |   |

|   |               |   |
|---|---------------|---|
| <b>6. a)</b>  |               |   |
| A $\cos x + 2 = \sin x + 2$ egyenletből: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$<br>( $k \in \mathbf{Z}$ ).  | 1 pont        | <i>Ha a vizsgázó számolás nélkül olvassa le, és behelyettesítéssel nem ellenőrzi az intervallum végpontjait, akkor ez a pont nem jár.</i>   |
| A fenti megoldásból adódik, hogy az ábrán megadott két görbe közös pontjainak első koordinátája $-\frac{3\pi}{4}$ , illetve $\frac{\pi}{4}$ . | 1 pont        |   |
| $T = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ((\cos x + 2) - (\sin x + 2)) dx =$   | 2 pont        | $T = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 2) dx -$<br>$- \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + 2) dx =$  |
| $= [\sin x + \cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$   | 2 pont        | $= [\sin x + 2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -$<br>$- [-\cos x + 2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$   |
| $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$                            | 1 pont        | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) -$<br>$- \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)\right] =$<br>$= (\sqrt{2} + 2\pi) - (-\sqrt{2} + 2\pi) =$ |
| $= 2\sqrt{2} \ (\approx 2,83)$  | 1 pont        |   |
| <b>Összesen:</b>  | <b>8 pont</b> |   |

|  |        |  |
|--|--------|--|
| <b>6. b) első megoldás</b>   |        |  |
| $a_1 = -\frac{6}{5}, a_2 = -\frac{17}{2}, a_3 = 28.$   | 1 pont |  |
| Mivel $a_2 < a_1 < a_3$ , ezért a sorozat nem monoton.   | 1 pont |  |
| Ha $n \geq 4$ , akkor $a_n > 0$ (mert a definiáló tört számlálója és nevezője is pozitív), tehát a sorozat alulról korlátos (például a $-\frac{17}{2}$ egy alsó korlátja). | 1 pont |  |

|  |               |  |
|--|---------------|--|
| (A sorozat hozzárendelési szabályát átalakítva:<br>$a_n = \frac{11 - \frac{5}{n}}{3 - \frac{8}{n}}$                  | 1 pont        | $a_n = \frac{11n - 5}{3n - 8} = \frac{\frac{11}{3} \cdot (3n - 8) + \frac{73}{3}}{3n - 8} =$                                 |
| Ha $n \geq 4$ , akkor a számláló 11-nél kisebb, a nevező pedig legalább 1,   | 1 pont        | $= \frac{11}{3} + \frac{73}{9n - 24}$  |
| ekkor tehát $a_n < \frac{11}{1} = 11$ .  | 1 pont        | <i>Ha <math>n \geq 4</math>, akkor ez kisebb, mint 10</i><br>$(a_n \leq \frac{11}{3} + \frac{73}{12} = \frac{39}{4} < 10)$ . |
| ( $a_2 < a_3 = 28$ és $a_1 < a_3 = 28$ is igaz, tehát) a sorozat felülről is korlátos, mert a 28 egy felső korlátja. | 1 pont        |  |
| A vizsgált sorozat tehát (alulról és felülről is korlátos, ezért valóban) korlátos.                                  | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>   | <b>8 pont</b> |  |

**6. b) második megoldás**

|   |               |   |
|---|---------------|---|
| $a_1 = -\frac{6}{5}, a_2 = -\frac{17}{2}, a_3 = 28$ .   | 1 pont        |   |
| Mivel $a_2 < a_1 < a_3$ , ezért a sorozat nem monoton.  | 1 pont        |   |
| Írjuk az $\{a_n\}$ sorozatot definiáló törtet $a_n = \frac{11 - \frac{5}{n}}{3 - \frac{8}{n}}$ alakban.                       | 1 pont        | $a_n = \frac{11n - 5}{3n - 8} = \frac{\frac{11}{3} \cdot (3n - 8) + \frac{73}{3}}{3n - 8} =$              |
| A számlálóban álló képlettel definiált $\{b_n\}$ sorozat konvergens (határértéke 11), és                                      | 1 pont        | $= \frac{11}{3} + \frac{73}{9n - 24}$   |
| a nevezőben álló képlettel definiált $\{c_n\}$ sorozat is konvergens (határértéke 3).   | 1 pont        | <i>Ha <math>d_n = \frac{73}{9n - 24}</math>, akkor a <math>\{d_n\}</math> konvergens (határértéke 0),</i> |
| Emiatt a $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok hányadosa, vagyis az $\{a_n\}$ sorozat is konvergens (határértéke $\frac{11}{3}$ ). | 1 pont        | <i>ezért az <math>\{a_n\}</math> is konvergens (határértéke <math>\frac{11}{3}</math>).</i>               |
| Minden konvergens sorozat korlátos,   | 1 pont        |   |
| ezért az $\{a_n\}$ sorozat is az.   | 1 pont        |   |
| <b>Összesen:</b>  | <b>8 pont</b> |   |

| <b>7. a) első megoldás</b>  |               |  |
|---|---------------|--|
| A nullát nem tartalmazó háromjegyűek száma $9^3 (= 729)$ .                                  | 1 pont        |  |
| Ezek között $8^3 (= 512)$ olyan szám van, amelyben nincs egyes számjegy.                    | 1 pont        |  |
| $9^3 - 8^3 (= 217)$ olyan háromjegyű szám van, amely megfelel a feltételeknek.              | 1 pont        |  |
| A megfelelő kétjegyűek száma $9^2 - 8^2 (= 17)$ ,   | 1 pont        |  |
| és egy darab egyjegyű is van, az 1 szám.  | 1 pont        |  |
| A megfelelő pozitív egészek száma ezek összege, tehát $9^3 - 8^3 + 9^2 - 8^2 + 1 (= 235)$ . | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>6 pont</b> |  |

| <b>7. a) második megoldás</b>   |               |  |
|---|---------------|--|
| A nullát nem tartalmazó háromjegyűek között pontosan egy egyest tartalmaz $3 \cdot 8 \cdot 8 (= 192)$ darab.  | 1 pont        |  |
| Két egyest tartalmaz $3 \cdot 8 (= 24)$ darab,  | 1 pont        |  |
| továbbá a 111 az egyetlen három egyest tartalmazó háromjegyű szám.  | 1 pont        |  |
| A nullát nem tartalmazó kétjegyűek között pontosan egy egyest tartalmazó szám $2 \cdot 8 (= 16)$ van, és két egyest tartalmaz a 11, ez tehát összesen 17 megfelelő kétjegyű szám. | 1 pont        |  |
| Az egyjegyűek között csak az 1 felel meg.   | 1 pont        |  |
| A megfelelő pozitív egészek száma ezek összege, tehát 235.  | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>6 pont</b> |  |

| <b>7. b)</b>   |               |                  |
|--|---------------|------------------|
| Ha az (egyetlen) $m$ számot $m + 10$ -re cseréljük, akkor (az adatok száma nem változik, és) az adatok összege 10-zel növekszik. | 1 pont        | $22n + 10 = 24n$ |
| Az átlag 2-vel nőtt, ezért az adatok száma $\left(\frac{10}{2} = \right) 5$ .  | 1 pont        | $n = 5$          |
| <b>Összesen:</b>   | <b>2 pont</b> |                  |

|   |               |   |
|---|---------------|---|
| <b>7. c)</b>  |               |   |
| Az 5 adat összege az eredeti adatsokaságban<br>( $5 \cdot 22 =$ ) 110.  | 1 pont        |   |
| Mivel a módusz 32, ezért a 32 gyakorisága legalább 2.   | 1 pont        |   |
| Az öt adatot nem csökkenő sorrendbe állítva a sorban az $m$ medián előtt álló szám az $m - 4$ (mert ha az $m$ -et 5-tel csökkentjük, akkor az új számsokaságban ez lép az $m$ helyébe). | 2 pont*       | $m - 4 = 10$ nem lehetséges (például azért, mert ekkor az öt adat összege nem lehetne 110). |
| A legkisebb adat a 10, így<br>$10 + (m - 4) + m + 32 + 32 = 110$ .  | 1 pont*       |   |
| Ebből $m = 20$ .  | 1 pont*       |   |
| Az adatok tehát a következők: 10, 16, 20, 32, 32.   | 1 pont        |   |
| Ellenőrzés: az öt szám átlaga 22; ha a 20-at 30-ra cseréljük, akkor 24 lesz az átlag; ha a 20 helyett 15-öt írunk, akkor pedig 16 lesz a medián.  | 1 pont        |   |
| <b>Összesen:</b>  | <b>8 pont</b> |   |

A \*-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

|  |        |  |
|--|--------|--|
| Az öt adat között szerepel (és a legkisebb) a 10 és legalább kétszer a 32 is.  | 1 pont |  |
| A két nem ismert adat összege:<br>$110 - (10 + 32 + 32) = 36$ .  | 1 pont |  |
| Ez a két adat pozitív egész, ezért a következő kéttagú összegek lehetségesek:<br>$10 + 26 = 11 + 25 = \dots = 17 + 19$ . | 1 pont |  |
| Ezek közül a feladat feltételeinek csak a 16 és a 20 felel meg.  | 1 pont |  |

|  |               |   |
|--|---------------|---|
| <b>8. a)</b>   |               |   |
| Az ACFH tetraéder térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a téglatest térfogatából levonjuk a $B, D, G, E$ csúcsnál látható négy egybevágó háromoldalú „sarokgúla” térfogatát. | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki.</i> |
| Egy „sarokgúla” térfogata $\frac{5 \cdot 12 \cdot 16}{6} = 160$ (cm <sup>3</sup> ).  | 1 pont        |   |
| Az ACFH tetraéder térfogata $5 \cdot 12 \cdot 16 - 4 \cdot \frac{5 \cdot 12 \cdot 16}{6} =$  | 1 pont        |   |
| $= 320$ cm <sup>3</sup> .  | 1 pont        |   |
| <b>Összesen:</b>   | <b>4 pont</b> |   |

*Megjegyzés: Az ACFH tetraéder egy lapja területének kiszámításáért önmagában nem jár pont.*

|  |               |   |
|--|---------------|---|
| <b>8. b)</b>   |               |   |
|  | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.</i> |
| Jó ábra (a tetraéder helyes feltüntetése).   |               |   |
| Egybevágó téglalapok átlói mind ugyanakkora hosszúságúak, ezért $AC = FH$ , $AF = CH$ és $AH = CF$ .                             | 1 pont        |   |
| A tetraéder lapjai tehát olyan háromszögek, amelyeknek oldalai páronként egyenlő hosszúak, ezért ezek mind egybevágók egymással. | 1 pont        |   |
| <b>Összesen:</b>   | <b>3 pont</b> |   |

|   |               |   |
|---|---------------|---|
| <b>8. c)</b>  |               |   |
| Annak belátásához, hogy az oldallapháromszögek hegyesszögűek, elegendő azt bizonyítani, hogy az egyik háromszög legnagyobb szöge hegyesszög.  | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó mindhárom szöget jól kiszámolja. (<math>83,4^\circ</math>; <math>56,4^\circ</math>; <math>40,2^\circ</math>)</i> |
| Például az $AFH$ háromszögben (Pitagorasz-tétellel)<br>$AF = 13 < AH = \sqrt{281} < FH = 20$ ,  | 1 pont        |   |
| így a háromszög $FH$ oldalával szemközti $\varphi$ szögének koszinusza (a koszinusztételből):<br>$\cos \varphi = \frac{169 + 281 - 400}{2 \cdot 13 \cdot \sqrt{281}} (\approx 0,1147).$ | 2 pont        |   |
| Mivel ez pozitív szám, ezért $\varphi$ valóban hegyesszög.  | 1 pont        |   |
| <b>Összesen:</b>  | <b>5 pont</b> |   |

|  |               |  |
|--|---------------|--|
| <b>8. d)</b>   |               |  |
| A $PRS$ háromszögben $PS = 15$ cm és $SR = 40$ cm, ezért (a háromszög-egyenlőtlenség miatt a 20, 25, illetve 30 cm közül) $PR = 30$ cm lehet csak. | 1 pont        |  |
| A $PQS$ háromszögben $PS + PQ = 25$ , ezért $QS = 20$ cm lehet csak.   | 1 pont        |  |
| Így $QR = 25$ cm lehet csak, és ekkor az $RSQ$ háromszög is létezik (mert $20 + 25 > 40$ ).  | 1 pont        |  |
| Tehát egyetlen megfelelő tetraéder van.  | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>   | <b>4 pont</b> |  |

| <b>9. a) első megoldás</b>   |               |  |
|--|---------------|--|
| Egy, kettő, három vagy négy lépésben érhattünk a 4-es mezőre.  | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| Egy lépésben csak úgy érhattünk a 4-es mezőre, ha 4-est dobtunk, ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$ .                               | 1 pont        |  |
| Két lépésben a következő dobásokkal juthattunk a 4-es mezőre: 3-1, 2-2 vagy 1-3.   | 1 pont        |  |
| Ennek a valószínűsége összesen $\left(3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}\right)$ .                                 | 1 pont        |  |
| Három lépésben a következő dobásokkal juthattunk a 4-es mezőre: 1-1-2, 1-2-1 vagy 2-1-1.   | 1 pont        |  |
| Ennek a valószínűsége összesen $\left(3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{216}\right)$ .              | 1 pont        |  |
| Négy lépésben csak négy 1-es dobással érhattunk a 4-es mezőre, ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$ . | 1 pont        |  |
| Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre az előzőek összege,  | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| tehát $\frac{343}{1296} \approx 0,265$ .   | 1 pont        | <i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>                  |
| <b>Összesen:</b>   | <b>9 pont</b> |  |

| <b>9. a) második megoldás</b>   |        |  |
|---|--------|--|
| Az első dobásunk lehetett 4-es, 3-as, 2-es vagy 1-es.   | 1 pont | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| Ha az első dobásunk 4-es volt, akkor rögtön rá is léptünk a 4-es mezőre. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$ .  | 1 pont |  |
| Ha az első dobásunk 3-as volt, akkor csak egy következő 1-es dobással juthattunk a 4-es mezőre. Ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ . | 1 pont |  |
| Ha az első dobásunk 2-es volt, akkor vagy egy következő 2-essel vagy két 1-essel juthattunk a 4-es mezőre.  | 1 pont |  |
| Ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$ .  | 1 pont |  |

|  |               |  |
|--|---------------|--|
| Ha az első dobásunk 1-es volt, akkor innen a következő dobásokkal juthattunk a 4-es mezőre: 3, 2-1, 1-2 vagy 1-1-1.  | 1 pont        |  |
| Ennek a valószínűsége<br>$\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{36} + \frac{2}{216} + \frac{1}{1296}.$ | 1 pont        |  |
| Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre, az előzőek összege,   | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| tehát $\frac{343}{1296} \approx 0,265.$  | 1 pont        | <i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>                  |
| <b>Összesen:</b>   | <b>9 pont</b> |  |

|   |               |  |
|---|---------------|--|
| <b>9. a) harmadik megoldás</b>  |               |  |
| Számítsuk ki a komplementer esemény valószínűségét. Ha nem léptünk rá a 4-es mezőre, akkor az 1., a 2., a 3. vagy a 4. lépésben átugrottuk azt.   | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>   |
| Ha az első lépésben ugrottuk át, akkor ez a dobásunk 5-ös vagy 6-os lehetett. Ennek a valószínűsége $\frac{2}{6}$ .   | 1 pont        |  |
| Ha a második lépésben ugrottuk át, akkor első két dobásunk a következő lehetett:<br>1-4, 1-5, 1-6,<br>2-3, 2-4, 2-5, 2-6,<br>3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6.<br>Ennek a valószínűsége $\frac{12}{36}$ .  | 2 pont        | <i>A két dobás összege szerint csoportosítva:<br/> 1-4, 2-3, 3-2;<br/> 1-5, 2-4, 3-3;<br/> 1-6, 2-5, 3-4;<br/> 2-6, 3-5;<br/> 3-6.</i> |
| Ha a harmadik lépésben ugrottuk át, akkor 2-1-es vagy 1-2-es első két dobás esetén harmadik dobásunk 5-féle (legalább 2-t dobunk), 1-1-es első két dobás esetén 4-féle lehetett (legalább 3-at dobunk).<br>Ennek a valószínűsége $\frac{14}{216}$ . | 2 pont        | <i>2-1-2, 1-2-2, 1-1-3;<br/> 2-1-3, 1-2-3, 1-1-4;<br/> 2-1-4, 1-2-4, 1-1-5;<br/> 2-1-5, 1-2-5, 1-1-6;<br/> 2-1-6, 1-2-6.</i>           |
| Ha a negyedik lépésben ugrottuk át a 4-es mezőt, akkor az első három dobásunk 1-1-1 volt, a negyedik pedig 5-féle lehetett (legalább 2-t dobtunk).<br>Ennek a valószínűsége $\frac{5}{1296}$ .  | 1 pont        |  |
| Annak a valószínűségét, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre, megkapjuk, ha az előzőek összegét 1-ből kivonjuk.   | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>   |
| Ez a valószínűség tehát<br>$1 - \left( \frac{2 \cdot 216 + 12 \cdot 36 + 14 \cdot 6 + 5}{1296} \right) = \frac{343}{1296} \approx 0,265.$   | 1 pont        | <i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>9 pont</b> |  |



| <b>9. b) első megoldás</b>  |               |  |
|---|---------------|--|
| A lehetőségeket aszerint csoportosítjuk, hogy András hányszor dobott 4-est az első három dobásánál.                 | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| Háromszor dobott 4-est: 1 lehetőség.  | 1 pont        |  |
| Kétszer dobott 4-est: ez nem lehetséges, mert akkor a harmadik dobásának is 4-esnek kellene lennie.                 | 1 pont        |  |
| Egyszer dobott 4-est: az első vagy a harmadik dobása lehetett 4-es.   | 1 pont        |  |
| A másik két dobásának összege is 4 (1-3, 3-1 vagy 2-2); ez mindkét esetben 3 lehetőség.<br>Ez összesen 6 lehetőség. | 1 pont        |  |
| Nem dobott 4-est: ekkor valamilyen sorrendben 1-1-2 volt a három dobása; ez 3 lehetőség.                            | 1 pont        |  |
| Összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.   | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>7 pont</b> |  |

| <b>9. b) második megoldás</b>  |               |  |
|--|---------------|--|
| A negyedik dobás előtt először, másodszor vagy harmadszor állhat András a 4-es mezőn.  | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| Ha először áll a 4-es mezőn, akkor dobássorozata 1-1-2, 1-2-1 vagy 2-1-1 volt. Ez 3 lehetőség.   | 1 pont        |  |
| Ha másodszor áll a 4-es mezőn, akkor először vagy az első vagy a második lépésével került oda.   | 1 pont        |  |
| Ha először az első lépésével került a 4-es mezőre, akkor az első dobása 4-es volt, a másik kettő pedig 3-1, 1-3 vagy 2-2 volt. Ez 3 lehetőség.         | 1 pont        |  |
| Ha először a második lépésével került a 4-es mezőre, akkor az első két dobása 3-1, 1-3 vagy 2-2 volt, harmadik dobása pedig 4-es volt. Ez 3 lehetőség. | 1 pont        |  |
| Ha harmadszor áll a 4-es mezőn, akkor mindkét korábbi dobása 4 volt. Ez 1 lehetőség.   | 1 pont        |  |
| Azaz összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.   | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>   | <b>7 pont</b> |  |

| <b>9. b) harmadik megoldás</b>  |               |  |
|---|---------------|--|
| András első dobása 4, 3, 2 vagy 1 lehetett.   | 1 pont        | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| Ha az első dobása 4 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok (a további dobások nagysága szerint rendezve) 4-4-4, 4-3-1, 4-2-2, 4-1-3. Ez 4 lehetőség. | 2 pont        |  |
| Ha az első dobása 3 volt, akkor a lehetséges dobássorozat csak 3-1-4 lehetett. Ez 1 lehetőség.  | 1 pont        |  |
| Ha az első dobása 2 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok 2-2-4, 2-1-1. Ez 2 lehetőség.   | 1 pont        |  |
| Ha az első dobása 1 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok 1-3-4, 1-2-1, 1-1-2. Ez 3 lehetőség.  | 1 pont        |  |
| Azaz összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.  | 1 pont        |  |
| <b>Összesen:</b>  | <b>7 pont</b> |  |

*Megjegyzés:*

*I) Ha a vizsgázó indoklás nélkül, de logikus sorrendben (felismerhető rendszerben), hiánytalanul és hibátlanul felsorolva adja meg a 10 lehetséges dobássorozatot, akkor ezért 6 pontot kapjon.*

*II) Ha a vizsgázó indoklás és azonosítható logika nélkül (rendszertelenül), de hiánytalanul és hibátlanul felsorolva adja meg a 10 lehetséges dobássorozatot, akkor ezért legfeljebb 4 pontot kapjon (mert nem derül ki a leírásából, hogy több lehetőség nincs).*

*Ha a vizsgázó indoklás nélküli felsorolással ad meg lehetséges dobássorozatokat, de hibát vét (kihagy dobássorozatot, rosszul vagy duplán ad meg dobássorozatot), akkor az alábbi táblázat szerint kapjon pontot.*

| <i>hibák száma</i> | <i>pontszám az I. esetben</i> | <i>pontszám a II. esetben</i> |
|--------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1                  | 5                             | 3                             |
| 2                  | 4                             | 2                             |
| 3                  | 3                             | 1                             |
| 4                  | 2                             | 0                             |
| 5                  | 1                             | 0                             |
| 6 vagy több        | 0                             | 0                             |