ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2016. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

Figyelem! Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

I.

1. a) **első megoldás**		
Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve: $\frac{4x^2+44x+121}{9}=x^2+6x+9$.	2 pont	
$x^2+2x-8=0$	2 pont	
$x = 2$ vagy $x = –4$.	1 pont	
A gyökök behelyettesítése után azt kapjuk, hogy mindkettő megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

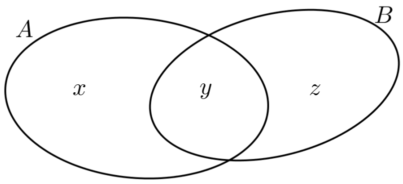
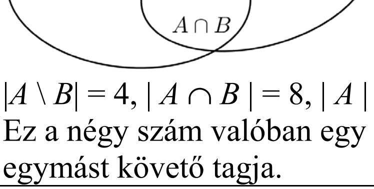
1. a) **második megoldás**		
$\frac{2x+11}{3}=\lvert x+3\rvert$	1 pont	
Ha $x\geq -3$, akkor az egyenlet: $\frac{2x+11}{3}=x+3$,	1 pont	
amiből $x = 2$ (ez valóban nem kisebb –3-nál).	1 pont	
Ha $x < –3$, akkor az egyenlet: $\frac{2x+11}{3}=-x-3$,	1 pont	
amiből $x = –4$ (ez valóban kisebb mint –3).	1 pont	
Ellenőrzés: ekvivalenciára hivatkozással vagy behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

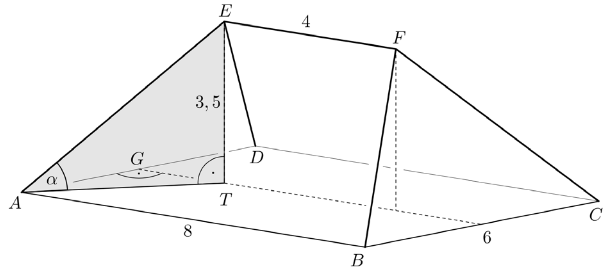
1. b)		
$x > 3$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldás helyességét.*
(A logaritmus azonosságait és definícióját használva:) $\log_2\frac{(x+1)(x-3)}{x+9}=$	1 pont	
$=\log_2 2$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a következő lépésből derül ki.*
(A logaritmus kölcsönös egyértelműsége miatt:) $\frac{(x+1)(x-3)}{x+9}=2$	1 pont	
Rendezve: $x^2-4x-21=0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei 7 és –3.	1 pont	
Ellenőrzés: a –3 nem, a 7 viszont megoldása az eredeti egyenletnek (behelyettesítéssel vagy az értelmezési tartományra és ekvivalens átalakításokra hivatkozással).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

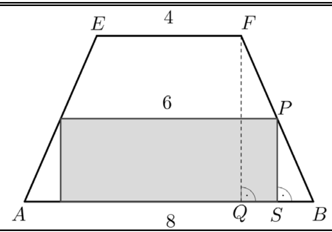
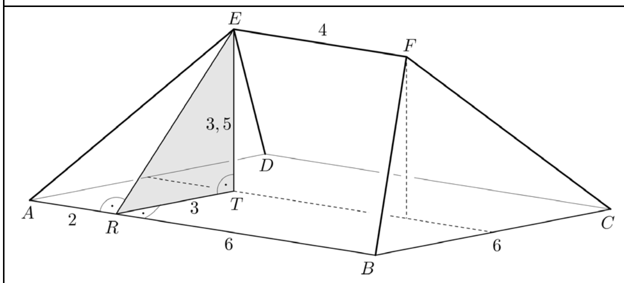
2. a) első megoldás		
5 tanulónak van jelese fizikából,	1 pont	
és 7 tanulónak van jelese matematikából.	1 pont	
$5 + 7 = 12$, de csak 10 tanulónak van legalább az egyik tárgyból jelese, ezért	1 pont	
mindkét tárgyból 2 tanulónak van jelese.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. a) második megoldás		
(Ha mindkét tárgyból x tanulónak van jelese, akkor) csak fizikából $5 - x$,	1 pont	
csak matematikából $7 - x$ tanulónak van jelese.	1 pont	
$5 - x + x + 7 - x = 10$	1 pont	
$x = 2$, azaz mindkét tárgyból 2 tanulónak van jelese.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen felvett és kitöltött halmazábra segítségével adja meg a helyes eredményt, akkor teljes pontszámot kapjon.

2. b)		
Készítsünk Venn-diagramot!  (x, y, z rendre az $A \setminus B$, az $A \cap B$, illetve a $B \setminus A$ halmaz elemeinek számát jelöli).	1 pont	
A számtani sorozat első tagja x, második tagja y, harmadik tagja pedig $x + y$, ezért	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
a számtani sorozat differenciája $(x + y) - y = x$.	1 pont	
Az A halmaz elemeinek száma tehát $3x$, a B halmazé pedig (a sorozat 4. tagja) $4x$.	1 pont	
Az A és B elemszámának összege 28, ezért $3x + 4x = 28$.	1 pont	
A számtani sorozat első tagja és differenciája is 4.	1 pont	
Ellenőrzés: A B halmaz elemszáma 16 (ezért $z = 8$).  $\|A \setminus B\| = 4$, $\| A \cap B \| = 8$, $\| A \| = 12$, $\| B \| = 16$. Ez a négy szám valóban egy számtani sorozat négy egymást követő tagja.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a)		
 (Használjuk az ábra jelöléseit!) Az *ATG* derékszögű háromszögben *GT* = 2 m és *AG* = 3 m,	1 pont	
így (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $AT=\sqrt{13}$ (≈ 3,61) (m).	1 pont	$GE=\sqrt{3{,}5^2+2^2}=$ $=\sqrt{16{,}25}$ (≈ 4,03) (m)
(Az *ATE* derékszögű háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt) $AE=\sqrt{AT^2+ET^2}=$	1 pont	$AE=\sqrt{GE^2+GA^2}$
$=\sqrt{25{,}25}\approx 5$ (m) a tartógerenda hossza.	1 pont	
A tartógerenda vízszintessel bezárt szöge az ábrán α-val jelölt *EAT* szög,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
amelyre $\sin\alpha=\dfrac{ET}{AE}$ (≈ 0,6965),	1 pont	
ahonnan $\alpha\approx 44^\circ$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b)		
A téglalap alakú napelem egyik oldalának hossza legfeljebb a trapéz középvonalának hossza lehet,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
azaz 6 méter.	1 pont	
A téglalap másik oldalának hossza állandó, mert az a trapéz magasságának a fele (az ábrán *PS* az *FQB* derékszögű háromszög középvonala).	1 pont	
 (Használjuk az ábra jelöléseit!) A trapéz magasságát az *ETR* derékszögű háromszögből számítva: $ER=\sqrt{ET^2+TR^2}=\sqrt{3{,}5^2+3^2}=\sqrt{21{,}25}$ (≈ 4,61) (m).	1 pont	*(A fenti ábra jelöléseit használva:)* $PS=\sqrt{PB^2-SB^2}=$ $=\sqrt{6{,}3125-1}=$ $=\sqrt{5{,}3125}$ (≈ 2,30) (m)

A legnagyobb napelem területe: $\frac{6\cdot\sqrt{21{,}25}}{2}$ (≈ 13,83) (m^2).	1 pont	*A legnagyobb napelem területe:* $6\cdot\sqrt{5{,}3125}$ (≈ 13,83) (m^2)
Legfeljebb 13,8 m^2 területű napelem helyezhető el.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**6 pont**	

4. a)		
A jegybevétel 1500 Ft-os ár és 1000 néző esetén 1 500 000 Ft.	1 pont	
Ha n-szer 5 forinttal növeljük a jegy árát ($n\in\mathbf{N}^+$), akkor (a modell szerint) a nézők száma 1000 – 10n fő lesz.	1 pont	
A módosult bevétel (1500 + 5n)(1000 – 10n) =	1 pont	
= 1 500 000 – 10 000n – 50n^2 forint,	1 pont	
ami kevesebb, mint 1 500 000 forint,	1 pont*	
mert pozitív értékű tagokat vonunk le belőle.	1 pont*	
Összesen:	**6 pont**	

*A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Ha b a pozitív valós számok halmazán értelmezett $b(n)=-50n^2-10\,000n+1\,500\,000$ „bevételfüggvény”, akkor $b'(n)=-100n-10\,000$.	1 pont	
A deriváltfüggvény a teljes értelmezési tartományon negatív, tehát a b függvény szigorúan monoton csökkenő (ilyen tehát a pozitív egészek halmazára leszűkített függvény is).	1 pont	

4. b)		
Ha m-szer 5 Ft-tal csökkentjük a jegy árát, akkor a nézők száma 1000 + 10m fő lesz ($m\in\mathbf{Z}$).	1 pont	
A módosult bevétel (1500 – 5m)(1000 + 10m) =	1 pont	
= 1 500 000 + 10 000m – 50m^2 (Ft).	1 pont	
Teljes négyzetté alakítva: –50(m – 100)^2 + 2 000 000, tehát	2 pont*	
m = 100 a maximumhely.	1 pont*	
Ekkor a jegy ára (1500 – 100 · 5 =) 1000 Ft.	1 pont	
A legnagyobb bevétel (1000 · 2000 =) 2 000 000 Ft.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetek valamelyikéért is megkaphatja a vizsgázó:*

Ha f a valós számok halmazán értelmezett $f(m) = -50m^2 + 10\ 000m + 1\ 500\ 000$ „bevételfüggvény”, akkor $f'(m) = -100m + 10\ 000$.	1 pont	
Ha $f'(m) = 0$, akkor $m = 100$.	1 pont	
Mivel $f''(m) = -100 < 0$, ezért a 100 valóban maximumhelye f-nek (és így az egész számok halmazára leszűkített függvénynek is).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol helyesen.*

Ha f a valós számok halmazán értelmezett $f(m) = -50m^2 + 10\ 000m + 1\ 500\ 000$ „bevételfüggvény”, akkor f zérushelyei a 300 és a –100.	1 pont	
f-nek maximuma van, és ezt a zérushelyeinek számtani közepénél veszi fel.	1 pont	
Az f maximumhelye tehát a 100. Ez egyben a bevétel maximumhelye is.	1 pont	

II.

5. a) első megoldás		
Az első gépsoron 80, a második gépsoron 170 hibás inget gyártanak.	1 pont	
(Hibás inget 250 ing közül választhatunk, tehát) az összes eset száma 250.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
(Második gépsoron készült hibás inget 170 ing közül választhatunk, tehát) a kedvező esetek száma 170.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség $\frac{170}{250} =$	1 pont	
$= 0,68$.	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

5. a) második megoldás		
Az első gépsoron 80, a második gépsoron 170 hibás inget gyártanak.	1 pont	
Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott inget a második gépsoron gyártották, B pedig azt az eseményt, hogy a kiválasztott ing anyaghibás. Ezekkel a keresett valószínűség: $P(A\|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki.*
$P(AB)=\frac{170}{9000}=\frac{17}{900}$	1 pont	
$P(B)=\frac{250}{9000}=\frac{25}{900}$	1 pont	
$P(A\|B)=\frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}}=\frac{17}{25}=0{,}68$	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

5. b)		
Legyen x az ing árleszállítás előtti ára forintban, és legyen $q=1-\frac{p}{100}$.	1 pont	
(Ha a két árleszállítás fordított sorrendben történt volna, akkor az ing kétszeres árleszállítás utáni ára xq – 500 forint, tehát) $(xq-500)+50=(x-500)\cdot q$.	2 pont	
(Ha mindkét alkalommal p% a csökkentés, akkor az új ár xq^2 forint, tehát) $(x-500)\cdot q+90=xq^2$.	2 pont	
Az első egyenletből q = 0,9,	1 pont	
azaz p = 10.	1 pont	
(A q értékét a második egyenletbe helyettesítve) $(x-500)\cdot 0{,}9+90=x\cdot 0{,}81$.	1 pont	
x = 4000	1 pont	
Az ing eredeti ára 4000 Ft, p értéke pedig 10.	1 pont	
Ellenőrzés: 4000 – 500 = 3500, 10%-kal csökkentve 3150; 4000 csökkentve 10%-kal 3600, 3600 – 500 = 3100; 4000 csökkentve 10%-kal 3600, újabb 10%-kal csökkentve 3240. 3150 = 3100 + 50 és 3150 = 3240 – 90, tehát a kapott eredmények helyesek.	1 pont	*Ez a pont csak akkor jár, ha a vizsgázó a feladat szövegébe történő behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldások helyességét.*
Összesen:	**11 pont**	

6. a)		
A $\cos x+2=\sin x+2$ egyenletből: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$).	1 pont	*Ha a vizsgázó számolás nélkül olvassa le, és behelyettesítéssel nem ellenőrzi az intervallum végpontjait, akkor ez a pont nem jár.*
A fenti megoldásból adódik, hogy az ábrán megadott két görbe közös pontjainak első koordinátája $-\frac{3\pi}{4}$, illetve $\frac{\pi}{4}$.	1 pont	
$T=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\big((\cos x+2)-(\sin x+2)\big)\,dx=$	2 pont	$T=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x+2)dx-$ $-\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+2)dx=$
$=[\sin x+\cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$	2 pont	$=[\sin x+2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-$ $-[-\cos x+2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$
$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$	1 pont	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)-$ $-\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)\right]=$ $=\left(\sqrt{2}+2\pi\right)-\left(-\sqrt{2}+2\pi\right)=$
$=2\sqrt{2}$ ($\approx 2{,}83$)	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. b) első megoldás		
$a_1=-\frac{6}{5}$, $a_2=-\frac{17}{2}$, $a_3=28$.	1 pont	
Mivel $a_2<a_1<a_3$, ezért a sorozat nem monoton.	1 pont	
Ha $n\ge 4$, akkor $a_n>0$ (mert a definiáló tört számlálója és nevezője is pozitív), tehát a sorozat alulról korlátos (például a $-\frac{17}{2}$ egy alsó korlátja).	1 pont	

(A sorozat hozzárendelési szabályát átalakítva:) $a_n = \dfrac{11-\frac{5}{n}}{3-\frac{8}{n}}$.	1 pont	$a_n = \dfrac{11n-5}{3n-8} =$ $= \dfrac{\frac{11}{3}\cdot(3n-8)+\frac{73}{3}}{3n-8} =$
Ha $n \geq 4$, akkor a számláló 11-nél kisebb, a nevező pedig legalább 1,	1 pont	$= \dfrac{11}{3} + \dfrac{73}{9n-24}$
ekkor tehát $a_n < \dfrac{11}{1} = 11$.	1 pont	*Ha $n \geq 4$, akkor ez kisebb, mint 10* ($a_n \leq \dfrac{11}{3} + \dfrac{73}{12} = \dfrac{39}{4} < 10$).
($a_2 < a_3 = 28$ és $a_1 < a_3 = 28$ is igaz, tehát) a sorozat felülről is korlátos, mert a 28 egy felső korlátja.	1 pont	
A vizsgált sorozat tehát (alulról és felülről is korlátos, ezért valóban) korlátos.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. b) második megoldás		
$a_1 = -\dfrac{6}{5}$, $a_2 = -\dfrac{17}{2}$, $a_3 = 28$.	1 pont	
Mivel $a_2 < a_1 < a_3$, ezért a sorozat nem monoton.	1 pont	
Írjuk az $\{a_n\}$ sorozatot definiáló törtet $a_n = \dfrac{11-\frac{5}{n}}{3-\frac{8}{n}}$ alakban.	1 pont	$a_n = \dfrac{11n-5}{3n-8} =$ $= \dfrac{\frac{11}{3}\cdot(3n-8)+\frac{73}{3}}{3n-8} =$
A számlálóban álló képlettel definiált $\{b_n\}$ sorozat konvergens (határértéke 11), és	1 pont	$= \dfrac{11}{3} + \dfrac{73}{9n-24}$
a nevezőben álló képlettel definiált $\{c_n\}$ sorozat is konvergens (határértéke 3).	1 pont	*Ha $d_n = \dfrac{73}{9n-24}$, akkor a $\{d_n\}$ konvergens (határértéke 0),*
Emiatt a $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok hányadosa, vagyis az $\{a_n\}$ sorozat is konvergens (határértéke $\dfrac{11}{3}$).	1 pont	*ezért az $\{a_n\}$ is konvergens (határértéke $\dfrac{11}{3}$).*
Minden konvergens sorozat korlátos,	1 pont	
ezért az $\{a_n\}$ sorozat is az.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. a) **első megoldás**		
A nullát nem tartalmazó háromjegyűek száma 9^3 (= 729).	1 pont	
Ezek között 8^3 (= 512) olyan szám van, amelyben nincs egyes számjegy.	1 pont	
$9^3 - 8^3$ (= 217) olyan háromjegyű szám van, amely megfelel a feltételeknek.	1 pont	
A megfelelő kétjegyűek száma $9^2 - 8^2$ (= 17),	1 pont	
és egy darab egyjegyű is van, az 1 szám.	1 pont	
A megfelelő pozitív egészek száma ezek összege, tehát $9^3 - 8^3 + 9^2 - 8^2 + 1 (= 235)$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a) **második megoldás**		
A nullát nem tartalmazó háromjegyűek között pontosan egy egyest tartalmaz $3 \cdot 8 \cdot 8$ (= 192) darab.	1 pont	
Két egyest tartalmaz $3 \cdot 8$ (= 24) darab,	1 pont	
továbbá a 111 az egyetlen három egyest tartalmazó háromjegyű szám.	1 pont	
A nullát nem tartalmazó kétjegyűek között pontosan egy egyest tartalmazó szám $2 \cdot 8$ (= 16) van, és két egyest tartalmaz a 11, ez tehát összesen 17 megfelelő kétjegyű szám.	1 pont	
Az egyjegyűek között csak az 1 felel meg.	1 pont	
A megfelelő pozitív egészek száma ezek összege, tehát 235.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. b)		
Ha az (egyetlen) *m* számot *m* + 10-re cseréljük, akkor (az adatok száma nem változik, és) az adatok összege 10-zel növekszik.	1 pont	$22n + 10 = 24n$
Az átlag 2-vel nőtt, ezért az adatok száma $\left(\frac{10}{2} = \right) 5$.	1 pont	$n = 5$
Összesen:	**2 pont**	

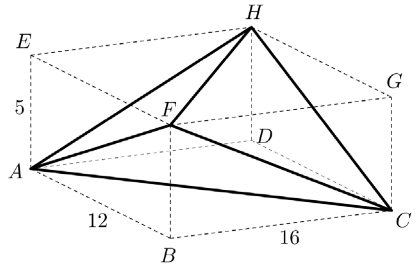
7. c)		
Az 5 adat összege az eredeti adatsokaságban $(5\cdot 22=)$ 110.	1 pont	
Mivel a módusz 32, ezért a 32 gyakorisága legalább 2.	1 pont	
Az öt adatot nem csökkenő sorrendbe állítva a sorban az m medián előtt álló szám az $m-4$ (mert ha az m-et 5-tel csökkentjük, akkor az új számsokaságban ez lép az m helyébe).	2 pont*	*$m-4=10$ nem lehetséges (például azért, mert ekkor az öt adat összege nem lehetne 110).*
A legkisebb adat a 10, így $10+(m-4)+m+32+32=110$.	1 pont*	
Ebből $m=20$.	1 pont*	
Az adatok tehát a következők: 10, 16, 20, 32, 32.	1 pont	
Ellenőrzés: az öt szám átlaga 22; ha a 20-at 30-ra cseréljük, akkor 24 lesz az átlag; ha a 20 helyett 15-öt írunk, akkor pedig 16 lesz a medián.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*A *-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

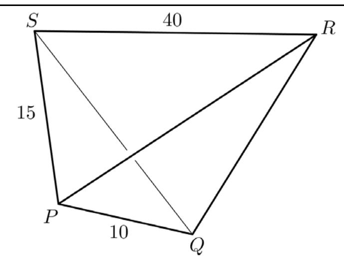
Az öt adat között szerepel (és a legkisebb) a 10 és legalább kétszer a 32 is.	1 pont	
A két nem ismert adat összege: $110-(10+32+32)=36$.	1 pont	
Ez a két adat pozitív egész, ezért a következő kéttagú összegek lehetségesek: $10+26=11+25=...=17+19$.	1 pont	
Ezek közül a feladat feltételeinek csak a 16 és a 20 felel meg.	1 pont	

8. a)		
Az *ACFH* tetraéder térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a téglatest térfogatából levonjuk a *B, D, G, E* csúcsnál látható négy egybevágó háromoldalú „sarokgúla” térfogatát.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki.*
Egy „sarokgúla” térfogata $\frac{5\cdot 12\cdot 16}{6}=160$ (cm^3).	1 pont	
Az *ACFH* tetraéder térfogata $5\cdot 12\cdot 16-4\cdot\frac{5\cdot 12\cdot 16}{6}=$	1 pont	
$=320$ cm^3.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Az ACFH tetraéder egy lapja területének kiszámításáért önmagában nem jár pont.

8. b)		
 Jó ábra (a tetraéder helyes feltüntetése).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.*
Egybevágó téglalapok átlói mind ugyanakkora hosszúságúak, ezért $AC = FH$, $AF = CH$ és $AH = CF$.	1 pont	
A tetraéder lapjai tehát olyan háromszögek, amelyeknek oldalai páronként egyenlő hosszúak, ezért ezek mind egybevágók egymással.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. c)		
Annak belátásához, hogy az oldallapháromszögek hegyesszögűek, elegendő azt bizonyítani, hogy az egyik háromszög legnagyobb szöge hegyesszög.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó mindhárom szöget jól kiszámolja. (83,4°; 56,4°; 40,2°)*
Például az AFH háromszögben (Pitagorasz-tétellel) $AF = 13 < AH = \sqrt{281} < FH = 20$,	1 pont	
így a háromszög FH oldalával szemközti φ szögének koszinusza (a koszinusztételből): $\cos\varphi = \dfrac{169+281-400}{2\cdot 13\cdot\sqrt{281}}$ $(\approx 0{,}1147)$.	2 pont	
Mivel ez pozitív szám, ezért φ valóban hegyesszög.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. d)		
A PRS háromszögben $PS = 15$ cm és $SR = 40$ cm, ezért (a háromszög-egyenlőtlenség miatt a 20, 25, illetve 30 cm közül) $PR = 30$ cm lehet csak.	1 pont	
A PQS háromszögben $PS + PQ = 25$, ezért $QS = 20$ cm lehet csak.	1 pont	
Így $QR = 25$ cm lehet csak, és ekkor az RSQ háromszög is létezik (mert $20 + 25 > 40$).	1 pont	
Tehát egyetlen megfelelő tetraéder van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. a) **első megoldás**		
Egy, kettő, három vagy négy lépésben érhettünk a 4-es mezőre.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Egy lépésben csak úgy érhettünk a 4-es mezőre, ha 4-est dobtunk, ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Két lépésben a következő dobásokkal juthattunk a 4-es mezőre: 3-1, 2-2 vagy 1-3.	1 pont	
Ennek a valószínűsége összesen $\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{3}{36}$.	1 pont	
Három lépésben a következő dobásokkal juthattunk a 4-es mezőre: 1-1-2, 1-2-1 vagy 2-1-1.	1 pont	
Ennek a valószínűsége összesen $\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{3}{216}$.	1 pont	
Négy lépésben csak négy 1-es dobással érhettünk a 4-es mezőre, ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{1296}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre az előzőek összege,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
tehát $\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**9 pont**	

9. a) **második megoldás**		
Az első dobásunk lehetett 4-es, 3-as, 2-es vagy 1-es.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha az első dobásunk 4-es volt, akkor rögtön rá is léptünk a 4-es mezőre. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Ha az első dobásunk 3-as volt, akkor csak egy következő 1-es dobással juthattunk a 4-es mezőre. Ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$.	1 pont	
Ha az első dobásunk 2-es volt, akkor vagy egy következő 2-essel vagy két 1-essel juthattunk a 4-es mezőre.	1 pont	
Ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$.	1 pont	

Ha az első dobásunk 1-es volt, akkor innen a következő dobásokkal juthattunk a 4-es mezőre: 3, 2-1, 1-2 vagy 1-1-1.	1 pont	
Ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{36}+\frac{2}{216}+\frac{1}{1296}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre, az előzőek összege,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
tehát $\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**9 pont**	

9. a) harmadik megoldás		
Számítsuk ki a komplementer esemény valószínűségét. Ha nem léptünk rá a 4-es mezőre, akkor az 1., a 2., a 3. vagy a 4. lépésben átugrottuk azt.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha az első lépésben ugrottuk át, akkor ez a dobásunk 5-ös vagy 6-os lehetett. Ennek a valószínűsége $\frac{2}{6}$.	1 pont	
Ha a második lépésben ugrottuk át, akkor első két dobásunk a következő lehetett: 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6. Ennek a valószínűsége $\frac{12}{36}$.	2 pont	*A két dobás összege szerint csoportosítva:* 1-4, 2-3, 3-2; 1-5, 2-4, 3-3; 1-6, 2-5, 3-4; 2-6, 3-5; 3-6.
Ha a harmadik lépésben ugrottuk át, akkor 2-1-es vagy 1-2-es első két dobás esetén harmadik dobásunk 5-féle (legalább 2-t dobunk), 1-1-es első két dobás esetén 4-féle lehetett (legalább 3-at dobunk). Ennek a valószínűsége $\frac{14}{216}$.	2 pont	2-1-2, 1-2-2, 1-1-3; 2-1-3, 1-2-3, 1-1-4; 2-1-4, 1-2-4, 1-1-5; 2-1-5, 1-2-5, 1-1-6; 2-1-6, 1-2-6.
Ha a negyedik lépésben ugrottuk át a 4-es mezőt, akkor az első három dobásunk 1-1-1 volt, a negyedik pedig 5-féle lehetett (legalább 2-t dobtunk). Ennek a valószínűsége $\frac{5}{1296}$.	1 pont	
Annak a valószínűségét, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre, megkapjuk, ha az előzőek összegét 1-ből kivonjuk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ez a valószínűség tehát $1-\left(\frac{2\cdot 216+12\cdot 36+14\cdot 6+5}{1296}\right)=\frac{343}{1296}\approx 0{,}265$.	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**9 pont**	

9. b) **első megoldás**		
A lehetőségeket aszerint csoportosítjuk, hogy András hányszor dobott 4-est az első három dobásánál.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Háromszor dobott 4-est: 1 lehetőség.	1 pont	
Kétszer dobott 4-est: ez nem lehetséges, mert akkor a harmadik dobásának is 4-esnek kellene lennie.	1 pont	
Egyszer dobott 4-est: az első vagy a harmadik dobása lehetett 4-es.	1 pont	
A másik két dobásának összege is 4 (1-3, 3-1 vagy 2-2); ez mindkét esetben 3 lehetőség. Ez összesen 6 lehetőség.	1 pont	
Nem dobott 4-est: ekkor valamilyen sorrendben 1-1-2 volt a három dobása; ez 3 lehetőség.	1 pont	
Összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. b) **második megoldás**		
A negyedik dobás előtt először, másodszor vagy harmadszor állhat András a 4-es mezőn.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha először áll a 4-es mezőn, akkor dobássorozata 1-1-2, 1-2-1 vagy 2-1-1 volt. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
Ha másodszor áll a 4-es mezőn, akkor először vagy az első vagy a második lépésével került oda.	1 pont	
Ha először az első lépésével került a 4-es mezőre, akkor az első dobása 4-es volt, a másik kettő pedig 3-1, 1-3 vagy 2-2 volt. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
Ha először a második lépésével került a 4-es mezőre, akkor az első két dobása 3-1, 1-3 vagy 2-2 volt, harmadik dobása pedig 4-es volt. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
Ha harmadszor áll a 4-es mezőn, akkor mindkét korábbi dobása 4 volt. Ez 1 lehetőség.	1 pont	
Azaz összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. b) **harmadik megoldás**		
András első dobása 4, 3, 2 vagy 1 lehetett.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha az első dobása 4 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok (a további dobások nagysága szerint rendezve) 4-4-4, 4-3-1, 4-2-2, 4-1-3. Ez 4 lehetőség.	2 pont	
Ha az első dobása 3 volt, akkor a lehetséges dobássorozat csak 3-1-4 lehetett. Ez 1 lehetőség.	1 pont	
Ha az első dobása 2 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok 2-2-4, 2-1-1. Ez 2 lehetőség.	1 pont	
Ha az első dobása 1 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok 1-3-4, 1-2-1, 1-1-2. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
Azaz összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés:
I) Ha a vizsgázó indoklás nélkül, de logikus sorrendben (felismerhető rendszerben), hiánytalanul és hibátlanul felsorolva adja meg a 10 lehetséges dobássorozatot, akkor ezért 6 pontot kapjon.

II) Ha a vizsgázó indoklás és azonosítható logika nélkül (rendszertelenül), de hiánytalanul és hibátlanul felsorolva adja meg a 10 lehetséges dobássorozatot, akkor ezért legfeljebb 4 pontot kapjon (mert nem derül ki a leírásából, hogy több lehetőség nincs).

Ha a vizsgázó indoklás nélküli felsorolással ad meg lehetséges dobássorozatokat, de hibát vét (kihagy dobássorozatot, rosszul vagy duplán ad meg dobássorozatot), akkor az alábbi táblázat szerint kapjon pontot.

hibák száma	*pontszám az I. esetben*	*pontszám a II. esetben*
1	5	3
2	4	2
3	3	1
4	2	0
5	1	0
6 vagy több	0	0