

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. május 3.**

# **MATEMATIKA**

## **KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

## **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
  - helyes lépés: *kipipálás*
  - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
  - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
  - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
  - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
  - nem érthető rész: *kérdőjel és/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik.** Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

- 
6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
  7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészeire előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
  8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
  9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
  10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
  11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
  12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
  13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

**Figyelem!** Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

## I.

<b>1.</b>		
$x_1 = 0$	1 pont	
$x_2 = \frac{5}{2}$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	


<b>2.</b>		
1. állítás: hamis.	1 pont	
2. állítás: igaz.	1 pont	
3. állítás: igaz.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>3.</b>		
$x = 25$	2 pont	$\log_3 9 = 2$ -ért 1 pont jár.
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>4.</b>		
A megadott számjegyek összege (18) osztható 3-mal.	1 pont	
(A 3, 4, 6 számjegyek tetszőleges sorrendben követhetik egymást az első három helyiértéken, így)	1 pont	
$3 \cdot 2 \cdot 1 =$	1 pont	
$= 6$ ilyen számot tudunk képezni.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül felsorolja a 6 megfelelő négyjegyű számot, akkor 2 pontot kap.*

<b>5.</b>		
$b_2 = -2$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>6.</b>		
Egy, a feladat feltételeinek megfelelő gráf rajzolása. Lehetőségek:		
	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>7.</b>		
$r^2 = CE^2 = (-2-1)^2 + (3-(-1))^2$	1 pont	
$r^2 = 25$ (vagy $r = 5$ )	1 pont	
A kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>8.</b>		
$P(A) = \frac{1}{6}$	1 pont	
$P(B) = \frac{4}{36} \left( = \frac{1}{9} \right)$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

*Megjegyzés: Tizedestörtben vagy százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*

<b>9.</b>		
Bármelyik nemnegatív szám felírása.	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem egy számot ír fel, ha nem utal arra, hogy bármilyen nem-negatív (pozitív) szám megfelel válaszként, akkor 2 pontot kapjon.*

<b>10.</b>		
$x_1 = -\pi$	1 pont	
$x_2 = \pi$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait fokban adja meg ( $-180^\circ, 180^\circ$ ), akkor 1 pontot kapjon. Ha a valós számok halmazán adja meg (jól) a függvény összes zérushelyét ( $x = \pi + k \cdot 2\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ), akkor 1 pontot kapjon.*

<b>11. első megoldás</b>		
A két négyzet egy-egy oldalának aránya (a hasonlóság aránya) is 1:4.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
A két négyzet területének aránya 1:16.	1 pont	
A nagyobb négyzet területe $400 \text{ cm}^2$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

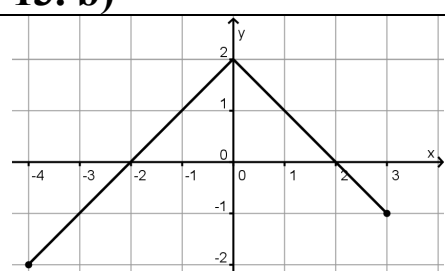
<b>11. második megoldás</b>		
A kisebb négyzet egy oldala 5 cm hosszú.	1 pont	
A nagyobb négyzet egy oldala 20 cm hosszú.	1 pont	
A nagyobb négyzet területe $400 \text{ cm}^2$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>12.</b>		
$1000 - 240 = 760$ megkérdezettnek van valamilyen biztosítása.	1 pont	
Az összes biztosítás száma: $470 + 520 = 990$ .	1 pont	
$990 - 760 = 230$ olyan megkérdezett ember van, akinek van mindkét biztosítása.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó jó Venn-diagrammról helyesen olvassa le a megoldást, maximális pontszámot kapjon.*

## II. A

<b>13. a)</b>		
$f(-2,85) = 2 -  -2,85  =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
$= -0,85.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>13. b)</b>		
		<i>A függvény helyes ábrázolásáért összesen 3 pont jár.</i>
Abszolútérték-függvényt ábrázol, ahol a szárak meredeksége 1 illetve $-1$ .	1 pont	
Az ábrázolt függvény értelmezési tartománya a $[-4; 3]$ intervallum.	1 pont	
Az ábrázolt függvénynek a 0 helyen maximuma van, ennek értéke 2.	1 pont	
A függvény értékkészlete a $[-2; 2]$ intervallum.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>13. c)</b>		
$\frac{1}{5} = 5^{-1}$	1 pont	
(Az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért) $2 -  x  = -1$ .	1 pont	
$ x  = 3$	1 pont	
$x_1 = 3; x_2 = -3$	1 pont	<i>Ha a vizsgázó csak az egyik gyököt találja meg, és azt ellenőrzi, akkor 1 pont jár.</i>
Ellenőrzés (mindkét gyökre).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a c) feladatot grafikus úton próbálja megoldani, de hibás grafikonból indul ki, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.*

<b>14. a)</b>						
	Vércsoport				3 pont	<i>0-1 helyes válasz 0 pont. 2 helyes válasz 1 pont. 3 helyes válasz 2 pont.</i>  <i>3-nál kevesebb helyes válasz esetén további 1 pont jár a vizsgázónak, ha a táblázatba írt négy szám összege 1.</i>
	0	A	B	AB		
Relatív gyakoriság	0,31	0,45	0,16	0,08		
<b>Összesen:</b>					<b>3 pont</b>	

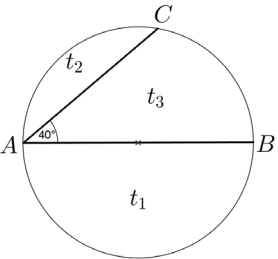
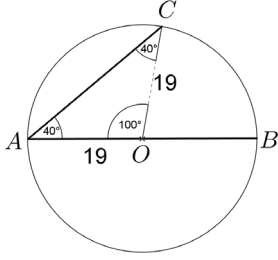
<b>14. b) első megoldás</b>		
A 125 nullás vércsoportú közül $\binom{125}{2} (= 7750)$ különböző módon választható ki kettő.	1 pont	
Két különböző Rh-faktorú nullás vércsoportú vérérdő $100 \cdot 25 (= 2500)$ különböző módon választható ki.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{100 \cdot 25}{\binom{125}{2}} \left( = \frac{2500}{7750} = \frac{10}{31} \right)$ ,	1 pont	
ennek két tizedesjegyre kerekített értéke 0,32.	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>4 pont</b>

<b>14. b) második megoldás</b>		
Annak a valószínűsége, hogy elsőre Rh-pozitív mintát és másodikkra Rh-negatív mintát választunk: $\frac{100 \cdot 25}{125 \cdot 124}$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy elsőre Rh-negatív mintát és másodikkra Rh-pozitív mintát választunk: $\frac{25 \cdot 100}{125 \cdot 124}$	1 pont	
A kérdéses valószínűség ezek összege,	1 pont	
amelynek két tizedes jegyre kerekített értéke 0,32.	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>4 pont</b>

*Megjegyzés: Ha a tanuló visszatevéses mintavétellel számol, és a választott modellben jól dolgozik  $\left( p = \frac{2 \cdot 100 \cdot 25}{125 \cdot 125} = 0,32 \right)$ , akkor 2 pontot kapjon.*

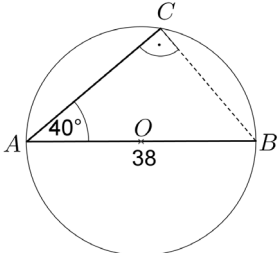


<b>14. c)</b>				
	Helyes-e a diagramon megadott érték? (igen-nem)	Ha a diagramon megadott érték nem helyes, akkor a helyes érték ennyi	1-1 pont	
Az Rh-pozitív vércsoportúak százalékos aránya	nem	81,25 %		
Az Rh-negatív vércsoportúak százalékos aránya	igen	–		
Az Rh-pozitív vércsoportúakat szemléltető körcikk középponti szöge	igen			
Az Rh-negatív vércsoportúakat szemléltető körcikk középponti szöge	nem	67,5°		
<b>Összesen:</b>			<b>5 pont</b>	

<b>15. a)</b>				
 <p>A félkör (a <math>t_1</math> jelű rész) területe: <math>\frac{19^2 \pi}{2} \approx</math></p>			1 pont	<i>Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.</i>
$\approx 567 \text{ m}^2.$			1 pont	
 <p>(Az <math>AOC</math> háromszög egyenlőszárú, így az <math>AC</math> szakaszhoz tartozó középponti szög <math>100^\circ</math>.)</p>			1 pont	
A $100^\circ$ -os középponti szögű $AOC$ körcikk területe: $\frac{19^2 \pi \cdot 100^\circ}{360^\circ} (\approx 315 \text{ m}^2).$			1 pont	<i>A <math>80^\circ</math>-os középponti szögű <math>BOC</math> körcikk területe: <math>\frac{19^2 \pi \cdot 80^\circ}{360^\circ} (\approx 252 \text{ m}^2).</math></i>
Az $AOC$ háromszög területe: $\frac{19^2 \cdot \sin 100^\circ}{2} (\approx 178 \text{ m}^2).$			1 pont	<i>Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.</i>

A körszelet területe a körcikk és a háromszög területének a különbsége.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Így a $t_2$ -vel jelölt területrész: $(315 - 178 =) 137 \text{ m}^2$ ,	1 pont	$t_3 = 252 + 178 = 430 \text{ m}^2$
a $t_3$ -mal jelölt területrész: $567 - 137 = 430 \text{ m}^2$ területű.	1 pont	$t_2 = 567 - 430 = 137 \text{ m}^2$
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

**15. b)**

 <p>(A Thalész-tétel miatt) az <math>ABC</math> háromszög derékszögű.</p>	1 pont	
$\sin 40^\circ = \frac{BC}{38}$	1 pont	
$BC = 38 \cdot \sin 40^\circ$	1 pont	
$BC \approx 24,4 \text{ m}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az egész feladat megoldása során valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

**II. B**

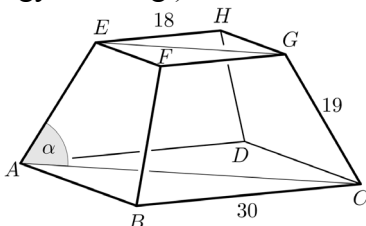
<b>16. a)</b>		
Az egymás mögött lévő sorokban található ülőhelyek száma egy olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, melynek első tagja $a_1 = 60$ és különbsége $d = 6$ .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
A sorozat 17. tagja $a_{17} = a_1 + 16d =$	1 pont	
$= 156$ . (A 17. sorban 156 ülőhely van.)	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

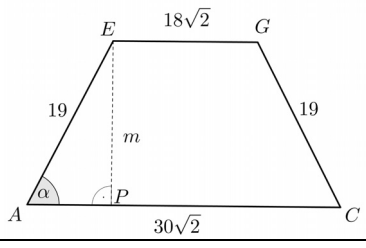
<b>16. b)</b>		
$6786 = \frac{2 \cdot 60 + (n-1) \cdot 6}{2} \cdot n$	1 pont	<i>Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.</i>
$6n^2 + 114n - 13572 = 0$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
$n_1 = 39$	1 pont	
$n_2 (= -58) < 0$ , ez nem felel meg a feladat szövegének.	1 pont	
39 sor van a színház nézőterén.	1 pont	
Ellenőrzés: $S_{39} = 6786$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>16. c)</b>		
$6786 = \frac{60 \cdot (1,1^n - 1)}{1,1 - 1}$	1 pont	<i>Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.</i>
$1,1^n = 12,31$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
$n = \frac{\lg 12,31}{\lg 1,1}$	2 pont	$n = \log_{1,1} 12,31$
$n \approx 26,34$	1 pont	
(Mivel a sorozat minden tagja pozitív, ezért) legalább az első 27 tagot kell összeadni, hogy elérjük a 6786-ot.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó megoldása során egyenlőtlenséggel számol egyenlet (egyenlőség) helyett, akkor a megfelelő pontok járnak.*

*Ha a vizsgázó kiszámolja a sorozat első 27 tagját és ez alapján jó választ ad, akkor jár a 7 pont.*

<b>17. a)</b>		
(Az oldaléleknek az alaplappal bezárt szöge az $ACGE$ húrtrapéz hosszabbik alapján fekvő szögével egyezik meg.)		
	2 pont	<i>Ez a 2 pont a kérdéses szög ismeretéért (akár ábra nélkül is) jár.</i>

Az $ACGE$ húrtrapéz alapjainak hossza $30\sqrt{2}$ , illetve $18\sqrt{2}$ .	2 pont	
A trapéz magasságát az $E$ csúcsból megrajzolva kapjuk az $APE$ derékszögű háromszöget. 	1 pont	
Ebben a háromszögben $AP = 6\sqrt{2}$ .	1 pont	
Tehát $\cos\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{19} (\approx 0,4466)$ .	1 pont	
Az oldalél és az alaplapp szöge: $\alpha \approx 63,5^\circ$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

<b>17. b)</b>		
A csonkagúla magassága Pitagorasz-tétellel vagy szögfüggvénnyel számítható ki.	1 pont	<i>Ez a pont a megfelelő egyenlet felírásáért jár.</i>
$m = 17$ (cm).	1 pont	
$V = \frac{17}{3} \cdot (30^2 + 30 \cdot 18 + 18^2) =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.</i>
$= 9996 \text{ cm}^3$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés: Helyes gondolatmenettel és jó kerekítésekkel kapott egyéb részeredmények és végeredmény is elfogadható.*

<b>17. c)</b>		
Az eredeti gráfban minden csúcsot még négy másikkal kell összekötni.	1 pont	
Ez összesen 32 behúzendó élt jelentene,	1 pont	
de így minden élt kétszer számolunk.	2 pont	
Tehát még 16 élt kell berajzolni.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó berajzolja az ábrába a hiányzó éleket, és azokat megszámlálva eredményül 16-ot kap, akkor jár az 5 pont. Ha a vizsgázó ábra alapján válaszol, akkor minden hiányzó vagy feleslegesen berajzolt élért 1 pont levonás jár.*

*Ha a vizsgázó ábra alapján válaszol, és a válasz nincs összhangban az ábrával, akkor (további) 1 pontot veszítsen.*

*(A megoldásra adott összpontszám nem lehet negatív.)*

<b>18. a)</b>		
A vizsgázó tudja, hogy egy mennyiség 2,4%-kal megnövelt értékét 1,024-del való szorzással kapjuk.	1 pont	
A vizsgázó tudja, hogy egy mennyiség 3,8%-kal (4,7%-kal) csökkentett értékét 0,962-del (0,953-del) való szorzással kapjuk.	1 pont	
Győr-Moson-Sopron megye népessége 2001-ben: 449 : 1,024 $\approx$ 438 (ezer fő). Vas megye népessége 2001-ben: 258 : 0,962 $\approx$ 268 (ezer fő). Zala megye népessége 2001-ben 283 : 0,953 $\approx$ 297 (ezer fő).	2 pont	<i>Egy hiba esetén 1 pont, kettő vagy több hiba esetén 0 pont jár.</i>
2001-ben a teljes régió népessége: 1003 ezer fő, 2011-ben a teljes régió népessége: 990 ezer fő.	1 pont	
$\frac{990}{1003} \cdot 100 \approx 98,7$	1 pont	
A régió népessége 2001 és 2011 között 1,3%-kal csökkent.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Megjegyzés: Helyes gondolatmenettel és jó kerekítésekkel kapott egyéb részeredmények és végeredmény is elfogadható.*

<b>18. b)</b>		
Ha $x$ ezer férfi él Budapesten, akkor $1,21x$ ezer nő, és ha $y$ ezer férfi él Pest megyében, akkor $1,084y$ ezer nő.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Így a táblázat adatai alapján $x + 1,21x = 1737$ .	1 pont	
Ebből $x \approx 786$ (ezer férfi).	1 pont	
A nők száma Budapesten körülbelül $1737 - 786 = 951$ (ezer fő).	1 pont	
A Pest megyei adatok alapján: $y + 1,084y = 1223$ .	1 pont	
Ebből $y \approx 587$ (ezer férfi).	1 pont	
A nők száma Pest megyében körülbelül $1223 - 587 = 636$ (ezer fő).	1 pont	
A nők és férfiak számának aránya a régióban: $\frac{951 + 636}{786 + 587} \approx 1,156$ ,	1 pont	
tehát 1000 férfira körülbelül 1156 nő jut a teljes régiót tekintve.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	