

Azonosító
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2017. május 9. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

--

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban felkelhető táblázatok helyettesítése (\sin , \cos , tg , \log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**

8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

-
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\lg x < 2$

b) $4x < 5 - x^2$

c) $0,5^{|x-3|} < 0,25$

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Noémi első egyetemi vizsgája három részből áll: egy projektmunkából, egy írásbeli dolgozattól, valamint egy szóbeli feleletből. Mindhárom rész eredményét százalékban adják meg.

A vizsga végeredményét egyetlen számmal jellemzik úgy, hogy kiszámolják a három rész százalékban megadott eredményének súlyozott számtani közepét: a projektmunka eredményét 2-es súllyal, az írásbeli dolgozat eredményét 5-ös súllyal, a szóbeli felelet eredményét 3-as súllyal veszik figyelembe.

Noémi projektmunkája 73%-os, írásbeli vizsgája 64%-os lett.

- a) Hány százalékra kell teljesítenie a szóbeli vizsgáját, hogy vizsgájának végeredménye legalább 70%-os legyen?

Az első évfolyam adatainak összesítésekor kiderült, hogy a 75 lány vizsgaeredményeinek átlaga 70%, a fiúk vizsgaeredményeinek átlaga 62% lett. A kollégiumban lakó 40 hallgató vizsgaeredményeinek átlaga 71%, a nem kollégistáké pedig 65% lett.

- b) Hányan vizsgáztak összesen az első évfolyamról?

a)	4 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	11 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Egy baráti társaság 8 tagjának tömegét mutatja az alábbi táblázat.

név	Albert	Bori	Csaba	Dénes	Elek	Frigyes	Gabi	Helga
tömeg (kg)	82	74	90	88	85	85	63	71

a) Adja meg a 8 adat mediánját, átlagát és szórását!

Ez a 8 ember lifttel szeretne feljutni egy épület legfelső emeletére, ahol a baráti társaság rendezvényét tartják. A kisméretű lift ajtáján ez a felirat áll: „Max. 3 személy vagy 230 kg” (vagyis a liftben nem utazhat 3-nál több személy, továbbá a liftben utazók tömegének összege nem lehet több 230 kg-nál).

b) Igazolja, hogy a lift három fordulója már elegendő ahhoz, hogy (az előírás betartásával) mind a 8 ember lifttel mehessen fel a rendezvény helyszínére!

A lift felújításakor a liftben együtt utazók megengedett össztömegét 300 kg-ra növelik, de a személyek számára vonatkozó korlátozás megmarad (legfeljebb 3 fő utazhat együtt).

c) Az új előírás figyelembevételével hányféleképpen mehetne fel a baráti társaság 8 tagja a lifttel, ha minden fordulóban legalább két személy utazna együtt? (Két „feljutást” különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csoport összetétele nem azonos a két feljutásban, vagy a csoportok más sorrendben jutottak fel a legfelső emeletre.)

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4. a) Mekkora területű síkidomot zár közre az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola és az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenes?

Az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola az x tengelyt az A és a B pontban metszi.

- b) Számítsa ki a parabola B pontbeli érintőjének meredekségét, ha tudjuk, hogy a B pont első koordinátája pozitív!

a)	8 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	14 pont	

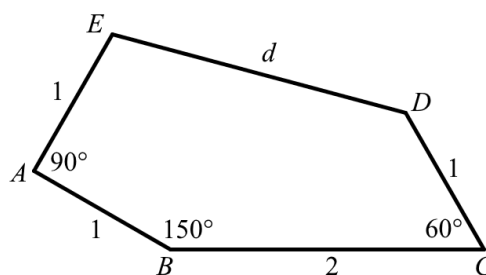
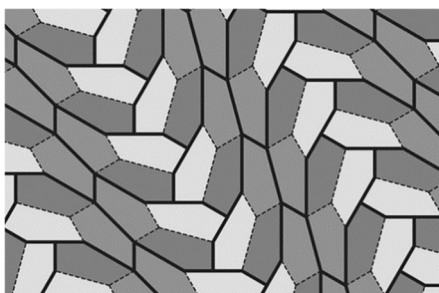
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

5. Az interneten érdekes hírként jelent meg 2015-ben, hogy a matematikusok újabb, egybevágó ötszögekből álló hézagmentes síklefedést (parkettázást) fedeztek fel. (A két ábrán a parkettázás egy részlete, illetve a parketta egyik ötszögének néhány adata látható: $EA = AB = CD = 1$, $BC = 2$, $EAB\angle = 90^\circ$, $ABC\angle = 150^\circ$, $BCD\angle = 60^\circ$.)



- a) Igazolja, hogy az ábrán megadott ötszög B csúcsából húzott két átló 75° -os szöget zár be egymással!
- b) Igazolja (például addíciós tételek segítségével), hogy $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- c) Igazolja, hogy az ötszög DE oldala hosszának pontos értéke $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
- d) Igazolja, hogy $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

- 6.** a) Az A és C kijelentések logikai értéke igaz, a B kijelentés logikai értéke hamis.
Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét!
(Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)

- (1) $\neg A \vee \neg B$
(2) $(A \wedge B) \vee \neg C$
(3) $B \rightarrow \neg A$
(4) $\neg A \leftrightarrow B$
(5) $A \rightarrow (B \wedge C)$

A H halmaz a tízpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: *Ha egy (tízpontú egyszerű) gráfnak legfeljebb 8 éle van, akkor nem tartalmaz kört.*

- b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

Egy tízpontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt.
(Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

- d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a három kiválasztott él a gráfnak egy körét alkotja!

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
d)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

7. a) Hány olyan különböző hegyesszögű háromszög van, melynek szögei fokban mérve különböző egész számok, és a szögek egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha nem hasonlók egymáshoz.)
- b) Igazolja, hogy nincs olyan szabályos n -szög, amelynek a belső szögei n fokosak!
- c) Egy szabályos n -szögről tudjuk, hogy a belső szögei fokban mérve egész számok. Hányféle lehet az n értéke?

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

- 8.** Járványos időszakban egy nagyváros lakóinak 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Ebben az időszakban a város lakói közül 80-an ugyanazon az autóbusszon utaznak.
- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az autóbusz 80 utasa között van legalább egy fertőzött? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A járvány terjedésére vonatkozó előrejelzések szerint a nagyvárosban a fertőzöttek száma minden nap az előző napi érték 105%-ára növekszik.

- b) Ha a növekedés üteme az előrejelzés szerint alakulna, akkor hány nap alatt emelkedne a város összlakosságának 0,2%-áról az összlakosság 1%-ára az összes fertőzött száma?

Egy kereskedelmi forgalomban is kapható gyorsteszt azt ígéri a felhasználóknak, hogy a teszt kimutatja a vírushatározást. A termék leírásában ez áll: „A teszt a vírussal fertőzött embereknél 99% valószínűséggel mutatja ki a fertőzöttséget. A vírussal nem fertőzött emberek esetében olykor szintén fertőzöttséget jelez a teszt, ám ennek a téves jelzésnek a valószínűsége mindössze 4%.”

- c) Tudjuk, hogy a város lakosságának 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Mutassa meg, hogy ha egy véletlenszerűen választott városlakó gyorstesztje fertőzöttséget mutat, akkor 0,05-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy a tesztalany valóban vírushatározott (tehát a gyorsteszt nem a fertőzöttség megbízható kimutatására alkalmas)!

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

9. Több részletben összesen 350 tonna árut szeretnénk vasúton elszállíttatni. Az egyik szállítócég ajánlatában a szállítási díj két összetevőből áll. Egyrészt a szállított áru tömegének négyzetével arányos díjat kell fizetnünk, másrészt az áru tömegétől független állandó alapdíjat is felszámítanak: ha egyszerre t tonna áru elszállítását rendeljük meg, akkor ezért $\frac{t^2}{10} + 205$ eurót kell fizetnünk.

- a) Igazolja, hogy ha két részletben (két alkalommal) szállíttatnánk el a 350 tonna árut, akkor a vasúti költség abban az esetben lenne a legkisebb, ha az árut két egyenlő tömegű részre osztanánk!

A vasúti szállítás költségének csökkentése érdekében a 350 tonna tömegű árut n egyenlő részre osztjuk, és azt tervezzük, hogy minden egyes alkalommal egy-egy részt szállíttatunk el a vasúttal. ($n \in \mathbf{N}^+$)

- b) Igazolja, hogy a szállítócég ajánlata szerint az n alkalommal történő vasúti szállítás költsége összesen $\frac{12\,250}{n} + 205n$ euró lenne!

A vasúti szállítás költségén kívül figyelembe kell vennünk azt is, hogy ha a 350 tonna árut n egyenlő tömegű részre akarjuk szétosztani, akkor a munka elvégzéséért nekünk $(n-1) \cdot 400$ eurót kell fizetnünk. ($n \in \mathbf{N}^+$)

- c) Hány egyenlő tömegű részletre bontva lenne a legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása?

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
