ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. május 8.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
(Elegendő megmutatni, hogy a háromszög legnagyobb szöge hegyesszög.) A legnagyobb szög a legnagyobb (11 cm hosszú) oldallal szemben van.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a háromszög mindhárom szögét helyesen kiszámolja.* (*A két kisebb szög* 54,7°, *illetve* 39,4°.)
Jelölje ezt a szöget α. A koszinusztétellel: $\cos\alpha = \frac{7^2+9^2-11^2}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{1}{14}$ (≈ 0,0714).	2 pont	
α ≈ 85,9°, tehát a háromszög valóban hegyesszögű.	1 pont	*Mivel* $0 < \cos\alpha$ (< 1), *ezért* α *hegyesszög.*
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó tanult tételként hivatkozik arra, hogy $a \le b \le c$ *esetén a háromszög pontosan akkor hegyesszögű, ha* $a^2+b^2>c^2$*, akkor ezért 3 pontot kapjon.*
További 2 pont jár azért, ha a tételt a konkrét esetre alkalmazva belátja, hogy $7^2+9^2>11^2$ *igaz, tehát a háromszög valóban hegyesszögű.*

1. b)		
Jelölje a háromszög oldalainak hosszát $a-d$, a és $a+d$ $(0<d<a)$.	1 pont	b, $b+d$, $b+2d$ $(b,\ d>0)$
A Pitagorasz-tétel alapján $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$.	1 pont	$b^2+(b+d)^2=(b+2d)^2$
A négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $a^2=4ad$.	1 pont	$b^2-2db-3d^2=0$
($a\neq 0$-val osztva) $a=4d$.	1 pont	*A b-ben másodfokú egyenletet megoldva* $b=3d$ ($b=-d$ *nem megoldás*).
A háromszög oldalai tehát $3d$, $4d$ és $5d$, az oldalak aránya ezért valóban $3:4:5$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. c)		
A háromszög területe: $\frac{3d\cdot 4d}{2}=121,5$.	1 pont	
Innen $12d^2=243$, azaz ($d>0$ miatt) $d=4,5$.	1 pont	
A háromszög oldalainak hossza tehát 13,5 cm, 18 cm és 22,5 cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. a)		
$20x + 30y = 36x + 18y$	1 pont	*A bal oldalon álló tört számlálóját és nevezőjét is y-nal elosztva:* $\dfrac{2\cdot\frac{x}{y}+3}{4\cdot\frac{x}{y}+2}=\dfrac{9}{10}$.
$12y = 16x$	1 pont	$20\cdot\frac{x}{y}+30=36\cdot\frac{x}{y}+18$
Ebből $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó csak a $2x + 3y = 9$ és $4x + 2y = 10$ *esettel foglalkozik, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*

2. b) első megoldás		
$f(x+1)=(x+1)^2-11(x+1)+30=x^2-9x+20$	2 pont	
Szorzattá alakítunk: $x^2-9x+20=(x-4)(x-5)$,	1 pont	
és $x^2-11x+30=(x-5)(x-6)$.	1 pont	
(Ha $f(x)\neq 0$, azaz $x\notin\{5;6\}$, akkor) $\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{(x-4)(x-5)}{(x-5)(x-6)}=\frac{x-4}{x-6}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. b) második megoldás		
$f(x+1)=(x+1)^2-11(x+1)+30=x^2-9x+20$	2 pont	
(Ha $f(x)\neq 0$, akkor $x\notin\{5;6\}$, tehát a bal és a jobb oldalon álló tört is értelmezve van.) A nevezőkkel szorozva: $(x-6)\cdot f(x+1)=(x-4)\cdot f(x)$. $(x-6)(x^2-9x+20)=(x-4)(x^2-11x+30)$	1 pont	
$x^3-15x^2+74x-120=x^3-15x^2+74x-120$	1 pont	
Ekvivalens átalakításokat végeztünk (az $\mathbf{R}\setminus\{5;6\}$ halmazon), ezért az eredeti állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. c) első megoldás		
(Ekvivalens átalakításokkal oldjuk meg az egyenlőtlenséget.) $\frac{x-4}{x-6}+1\le 0$ $\frac{2x-10}{x-6}\le 0$	1 pont	
$x = 5$, vagy a számláló és a nevező előjele különböző.	1 pont*	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó egy számegyenesen helyesen ábrázolja a számláló és a nevező előjelét, és onnan olvassa le jól a megoldást.*
$2x-10 < 0$ ($x < 5$) és $x-6 > 0$ ($x > 6$) egyszerre nem lehetséges.	1 pont	
$2x-10 > 0$ és $x-6 < 0$ egyszerre teljesül, ha $5 < x < 6$.	1 pont	
Tehát $5 \le x < 6$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontot akkor is megkaphatja a vizsgázó, ha (a szigorú egyenlőtlenségek helyett) a* $2x-10 \le 0$ *és a* $2x-10 \ge 0$ *esetek vizsgálatával oldja meg a feladatot.*

2. c) második megoldás		
(Ekvivalens átalakításokkal oldjuk meg az egyenlőtlenséget.) Ha $x > 6$, akkor $x-4 \le 6-x$.	1 pont	
Ebből $x \le 5$, tehát a $]6; +\infty[$ halmazon nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.	1 pont	
Ha $x < 6$, akkor $x-4 \ge 6-x$.	1 pont	
Ebből $x \ge 5$, tehát a $]-\infty; 6[$ halmazon az $[5; 6[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek. (Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát: $[5; 6[$.)	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a) **első megoldás**		
Ha Ágoston mindhárom osztályzata azonos, akkor 5 megfelelő számhármas van.	1 pont	
Két egyforma és egy különböző osztályzatot $5 \cdot 4$-féleképpen szerezhetett (a két egyforma osztályzat 5-féleképpen, a harmadik osztályzat 4-féleképpen választható).	1 pont*	
Három különböző osztályzatot $\binom{5}{3} = 10$-féleképpen szerezhetett. (A nem egyforma osztályzatok sorrendje mindkét esetben már egyértelmű.)	2 pont	
A megfelelő esetek száma $(5 + 5 \cdot 4 + 10 =) \, 35$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont a következő gondolatért is jár.*

A két különböző osztályzat $\binom{5}{2}$ *-féleképpen választható, a kiválasztás után pedig kétféleképpen választható meg az, hogy melyik osztályzatból legyen két egyforma.*

Ez $2 \cdot \binom{5}{2} = 20$ *lehetőség.*

3. a) **második megoldás**		
Ha Ágoston első osztályzata 1, akkor a második osztályzat lehet 1, 2, 3, 4 vagy 5. Ekkor rendre 5, 4, 3, 2, illetve 1 lehetőség van a harmadik osztályzatára. Ez összesen (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) 15 lehetőség.	1 pont	
Ha Ágoston első osztályzata 2, akkor a második osztályzat lehet 2, 3, 4 vagy 5. Ekkor rendre 4, 3, 2, illetve 1 lehetőség van a harmadik osztályzatára. Ez összesen (4 + 3 + 2 + 1 =) 10 lehetőség.	1 pont	
Ha Ágoston első osztályzata 3, akkor a második osztályzat lehet 3, 4 vagy 5. Ekkor rendre 3, 2, illetve 1 lehetőség van a harmadik osztályzatára. Ez összesen (3 + 2 + 1 =) 6 lehetőség.	1 pont	
Ha Ágoston első osztályzata 4 vagy 5, akkor osztályzatai lehetnek: 4-4-4, 4-4-5, 4-5-5 vagy 5-5-5. Ez összesen 4 lehetőség.	1 pont	
A megfelelő számhármasok száma tehát (15 + 10 + 6 + 4 =) 35.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a) **harmadik megoldás**		
Ha Ágoston második osztályzata 1, akkor az első osztályzata 1-féle, a harmadik osztályzata 5-féle lehet, ez $1 \cdot 5$ lehetőség.	1 pont	
Hasonlóan, ha a második osztályzata 2, 3, 4 vagy 5, akkor az első osztályzata rendre 2, 3, 4, 5-féle; a harmadik osztályzata pedig 4, 3, 2, 1-féle lehet. A lehetőségek száma így $2 \cdot 4$, $3 \cdot 3$, $4 \cdot 2$, illetve $5 \cdot 1$.	3 pont	
A megfelelő számhármasok száma $(2 \cdot (1 \cdot 5 + 2 \cdot 4) + 3 \cdot 3 =)$ 35.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a) **negyedik megoldás**		
Ha adott Ágoston három osztályzata, akkor ezek sorrendje már egyértelmű. Tehát a megfelelő számhármasok számát megkapjuk, ha az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül kiválasztunk hármat úgy, hogy a kiválasztás sorrendje közömbös, és egy-egy számot többször is választhatunk.	3 pont	
A megfelelő számhármasok száma egyenlő 5 elem 3-adosztályú ismétléses kombinációinak a számával: $C_5^{3(i)} = \binom{5+3-1}{3} = 35$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges számhármast rendezetten felsorolja, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

3. b) **első megoldás**		
Ha az osztálylétszám n fő, az egy tanulóra jutó szálláskültség pedig (n résztvevő esetén) x Ft, akkor $\left.\begin{aligned} n \cdot x &= (n-1) \cdot (x+120) \\ n \cdot x &= (n-2) \cdot (x+250) \end{aligned}\right\}$.	2 pont	
Az első egyenletből x-et kifejezve: $x = 120n - 120$.	1 pont	$\left.\begin{aligned} 0 &= -x + 120n - 120 \\ 0 &= -2x + 250n - 500 \end{aligned}\right\}$
Ezt a második egyenletbe behelyettesítve és nullára rendezve: $0 = -2(120n - 120) + 250n - 500$.	1 pont	*Az első egyenlet* (–2)*-szeresét a másodikhoz adva:* $0 = 10n - 260$.
$n = 26$ (tehát az osztálylétszám 26 fő), és $x = 3000$.	1 pont	
A fizetendő teljes szállásdíj: $n \cdot x = 26 \cdot 3000 = 78\,000$ Ft.	1 pont	
Ellenőrzés: $26 \cdot 3000 = 25 \cdot 3120 = 24 \cdot 3250$ $(= 78\,000)$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) második megoldás		
Ha az osztálylétszám n fő, akkor (a szöveg szerint) az egy tanulóra jutó szállásdíj $(n-1)\cdot 120$ Ft,	1 pont	
a két tanulóra jutó szállásdíj pedig $(n-2)\cdot 250$ Ft.	1 pont	
Tehát $(n-2)\cdot 250 = 2\cdot(n-1)\cdot 120$,	1 pont	
$n = 26$ (az osztálylétszám 26 fő).	1 pont	
Az egy tanulóra jutó szállásdíj $(25\cdot 120 =)$ 3000 Ft, a teljes szállásdíj pedig $(26\cdot 3000 =)$ 78 000 Ft.	2 pont	
Ellenőrzés: $26\cdot 3000 = 25\cdot 3120 = 24\cdot 3250\ (= 78\,000)$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

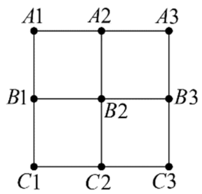
4. a)		
Az adatok száma páratlan, ezért a medián (a 72) szerepel az adatok között.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A hét adat között a 71 és a 75 pontosan kétszer szerepel (egynél többször kell előfordulniuk, de ha háromszor szerepelnének, akkor a terjedelem 4 lenne). Még két adatot kell tehát meghatározni.	1 pont	
A hét adat összege $(7\cdot 73 =)$ 511, a hiányzó két adat összege így $(511 - 364 =)$ 147.	1 pont	
A hiányzó adatok egyike sem lehet a 72, mert akkor nem teljesülne a móduszokra vonatkozó feltétel, és nem lehet mindkettő 72-nél nagyobb sem, mert akkor a 72 nem lenne medián.	1 pont	*A már ismert öt adat és a terjedelem miatt a legkisebb adat legalább* $(75 - 7 =)$ 68, *a legnagyobb pedig legfeljebb* $(71 + 7 =)$ 78 *lehet.*
Tehát a hiányzó adatok közül az egyik legfeljebb 70 lehet, a másik pedig ekkor a terjedelem miatt legfeljebb 77 lehet.	1 pont	*Ezt figyelembe véve a* 147 *lehetséges felbontásai:* $147 = 68 + 79 = 69 + 78 = 70 + 77 = 71 + 76 = 72 + 75 = 73 + 74$.
(Mivel $70 + 77 = 147$, ezért) csak a 70 és a 77 lehetséges.	1 pont	*Ezek közül a terjedelem miatt csak a* $70 + 77$ *felel meg.*
A hét szám: 70, 71, 71, 72, 75, 75, 77.	1 pont	*Tetszőleges sorrendben megadva is jár a pont.*
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül, nemcsökkenő (vagy nemnövekvő) sorrendben felsorolva, helyesen adja meg a hét számot, akkor 2 pontot kapjon. Ha ezen túl igazolja, hogy a megadott hét szám megfelel a feladatban megadott feltételeknek (és ezeket a megállapításokat dokumentálja), akkor további 2 pontot kapjon. A további 3 pontot akkor kaphatja meg, ha igazolja, hogy más megoldása nem lehet a feladatnak.

4. b)		
$72 = 2^3 \cdot 3^2$ és $27\,720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.	2 pont	
(A legkisebb közös többszörös definíciója miatt) $n = 2^k \cdot 3^m \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ alakban írható fel,	1 pont	*(A legkisebb közös többszörös definíciója miatt) az n prímtényezői között szerepel az 5, a 7 és a 11, mindegyikük pontosan az első hatványon,*
ahol $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ és $m \in \{0; 1; 2\}$.	1 pont	*a 2-es prímtényező legnagyobb kitevője 3 (4 lehetőség), a 3-as prímtényezőé pedig legfeljebb 2 lehet (3 lehetőség). (Más prímtényezője pedig nincs az n-nek.)*
Az n lehetséges értékeinek száma tehát $4 \cdot 3 = 12$.	1 pont	
Az n legkisebb lehetséges értéke ($2^0 \cdot 3^0 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 =$) 385.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:
1. Az n lehetséges értékei növekvő sorrendben felsorolva:
385, 770, 1155, 1540, 2310, 3080, 3465, 4620, 6930, 9240, 13 860, 27 720.
2. Ha a vizsgázó a válaszát az n lehetséges értékeinek prímtényezős alakban történő felsorolására alapozva helyesen adja meg, akkor teljes pontszámot kapjon.

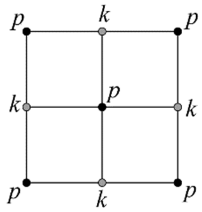
II.

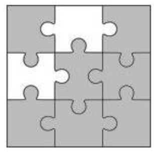
5. a)		
	2 pont	*Ha a csúcsok azonosítása hiányzik, akkor legfeljebb 1 pont jár.*
A fokszámok összege $4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 = 24$.	1 pont	*A gráfnak 12 éle van, a fokszámösszeg ennek kétszerese, tehát 24.*
Összesen:	**3 pont**	

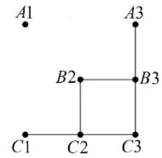
5. b) első megoldás		
A gráf egy köre – az a) rész megoldásában megadott ábra szerint – 1, 2, 3 vagy 4 „négyzetből” álló sokszöget „keríthet körül”.	1 pont	
Ha a körbekerített négyzetek száma 1, 2, 3 vagy 4, akkor a kör éleinek száma rendre 4, 6, 8, 8,	2 pont	
tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

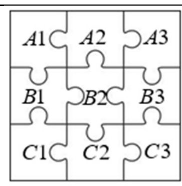
5. b) **második megoldás**		
Ha a (fenti ábra szerint rajzolt) gráf egy körét az éleken haladva bejárjuk, és visszaérkezünk a kiindulási pontba, akkor vízszintes irányban jobbra, illetve balra ugyanannyi „lépést” kell tennünk. A vízszintes irányú lépések száma így páros, és hasonlóan páros a függőleges irányú lépések száma is.	2 pont	
Ezért a teljes lépésszám – azaz a gráf körében szereplő élek száma – is páros,	1 pont	
tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

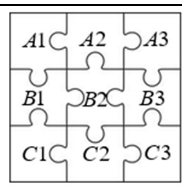
5. b) **harmadik megoldás**		
Helyezzük el a 3×3-as gráf csúcsait a derékszögű koordináta-rendszer rácspontjaira úgy, hogy a $C1$ jelű csúcs kerüljön az origóba (ekkor koordinátái (0; 0)), az $A3$ jelű csúcs pedig a (2; 2) pontba. Ha a gráf egy körét az éleken haladva bejárjuk, akkor minden „lépés” során megváltozik a csúcsok koordinátái összegének a paritása. (Ha pl. az (1; 1) pontból a (2; 1) pontba lépünk, a koordináták összege 2-ről 3-ra módosul, azaz párosról páratlanra változik.)	2 pont	
Ha visszaérkezünk a kiindulási pontba, akkor – a paritás megmaradása miatt – a lépések száma, azaz a kört alkotó élek száma is páros,	1 pont	
tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b) **negyedik megoldás**		
 Színezzük a gráf csúcsait pirosra és kékre az ábra szerint. Piros csúcsból csak kékbe, kék csúcsból csak pirosba tudunk lépni.	2 pont	
Ezért ha a gráf egy körét az éleken bejárva visszaérkezünk a kiindulási pontba, akkor a lépések száma, azaz a gráf körét alkotó élek száma páros,	1 pont	
tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. c) első megoldás		
Például a puzzle $A2$ és $B1$ jelű darabját elhagyva a megmaradó 7 puzzle-elem által alkotott részlet nem lesz összefüggő.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5. c) második megoldás		
Például a gráf $A2$ és $B1$ jelű csúcsát és az ezekből induló éleket elhagyva a megmaradó hétpontú gráf nem lesz összefüggő.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

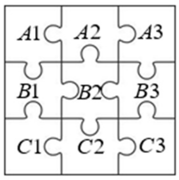
5. d) első megoldás		
A három kapcsolódó játékelem helyzete lehet vízszintes, függőleges vagy L alakú.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A vízszintes helyzetű elemhármasok száma 3,	1 pont	
és ugyanennyi a függőleges elemhármasoké is.	1 pont	
Négyféle L alakú, összefüggő elemhármas van: ┘ └ ┐ ┌	1 pont	
Mind a négy esetben a középső elem 4-féle lehet. (A fenti L alakoknak megfelelően rendre $B2$, $B3$, $C2$, $C3$; $A2$, $A3$, $B2$, $B3$; $B1$, $B2$, $C1$, $C2$; $A1$, $A2$, $B1$, $B2$.)	2 pont	
A megfelelő elemhármasok száma így $2\cdot 3+4\cdot 4=22$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. d) második megoldás		
Az $A1$, $C1$, $C3$, $A3$ puzzle-elemek mindegyike 5 megfelelő elemhármas egyik darabja: 1 vízszintes és 1 függőleges elemhármasnak, továbbá 1 darab L alaknak a közepén és 2 darab L alaknak valamelyik végén szerepelnek.	1 pont	
Az $A1$, $C1$, $C3$, $A3$ elemekhez ilyen módon összesen $4\cdot 5$ megfelelő elemhármas tartozik.	1 pont	
A $B1$, $C2$, $B3$, $A2$ elemek mindegyike 8 megfelelő elemhármas egyik darabja: 1 vízszintes és 1 függőleges elemhármasnak, továbbá 2 darab L alaknak a közepén és 4 L alaknak a végén szerepelnek.	1 pont	
A $B1$, $C2$, $B3$, $A2$ elemekhez ilyen módon összesen $4\cdot 8$ megfelelő elemhármas tartozik.	1 pont	

A középső $B2$ puzzle-elem 14 megfelelő elemhármas egyik darabja: 1 vízszintes és 1 függőleges elemhármasnak, továbbá 4 darab L alaknak a közepén és 8 darab L alaknak valamelyik végén szerepel.	1 pont	
Mivel a fenti összeszámolásban minden elemhármast 3-szor számoltunk (az őket alkotó 3 puzzle-elem mindegyikénél),	1 pont	
ezért a megfelelő elemhármasok száma $\frac{4\cdot 5+4\cdot 8+14}{3}=22$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. d) **harmadik megoldás**		
A három kapcsolódó játékelem helyzete lehet vízszintes, függőleges vagy L alakú.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A vízszintes helyzetű elemhármasok száma 3,	1 pont	
és ugyanennyi a függőleges elemhármasoké is.	1 pont	
(A továbbiakban esetszétválasztást végzünk aszerint, hogy az L alakú megfelelő elemhármasok két vízszintes darabját melyik sorból választjuk ki.) Ha az első vagy a harmadik sorból választjuk az L alak két összefüggő elemét, akkor ezekhez a harmadik elemet 2-féleképpen választhatjuk.	1 pont	
Ha a második sorból választjuk ki az L alak két összefüggő elemét, akkor ezekhez a harmadik elemet 4-féleképpen választhatjuk.	1 pont	
Minden sorban 2-féleképpen választhatunk ki két összefüggő elemet,	1 pont	
így a megfelelő elemhármasok száma $2\cdot 3+2\cdot(2+4+2)=22$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes megfelelő elemhármast rendezetten felsorolja, és ez alapján helyes választ ad (1 pont), akkor teljes pontszámot kapjon.



Például:

vízszintes elemhármasok: $A1$-$A2$-$A3$, $B1$-$B2$-$B3$, $C1$-$C2$-$C3$; *(1 pont)*
függőleges elemhármasok: $A1$-$B1$-$C1$, $A2$-$B2$-$C2$, $A3$-$B3$-$C3$; *(1 pont)*
L alakok: $A1$-$A2$-$B2$, $A2$-$A3$-$B3$, $B1$-$B2$-$C2$, $B2$-$B3$-$C3$;
$A1$-$B1$-$B2$, $A2$-$B2$-$B3$, $B1$-$C1$-$C2$, $B2$-$C2$-$C3$;
$B1$-$A1$-$A2$, $B2$-$A2$-$A3$, $C1$-$B1$-$B2$, $C2$-$B2$-$B3$;
$B1$-$B2$-$A2$, $B2$-$B3$-$A3$, $C1$-$C2$-$B2$, $C2$-$C3$-$B3$. *(4 pont)*

6. a)		
Az E koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve: $(-7)^2+5^2+4\cdot(-7)-16\cdot5+34=0$.	1 pont	
A bal oldal értéke (49 + 25 – 28 – 80 + 34 =) 0, ezért E valóban rajta van a k körön.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

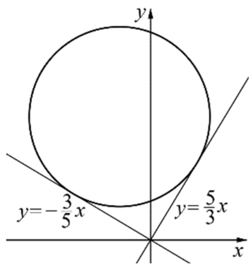
6. b)		
A kör egyenletét átalakítva: $(x+2)^2+(y-8)^2=34$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezt az átalakítást az a) feladat megoldásánál végzi el a vizsgázó.*
ahonnan a k kör középpontja $C(-2; 8)$ (sugara pedig $\sqrt{34}$ egység).	1 pont	
Az érintőegyenes egy normálvektora $\overrightarrow{EC}=(5; 3)$.	1 pont	
Az érintőegyenes egyenlete $5x+3y=-20$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az érintő egyenletét paraméteres alakban keresi, akkor 1 pontot kapjon annak megállapításáért, hogy a keresett érintő egyenlete felírható $y=m(x+7)+5$ alakban (mert az $x=-7$ egyenes nem érintő).
További 2 pontot kapjon azért, ha az egyenes és a kör egyenletéből alkotott egyenletrendszerből eljut annak megállapításáig, hogy az
$(m^2+1)x^2+(14m^2-6m+4)x+(49m^2-42m-21)=0$
egyenlet diszkriminánsa – a $36m^2+120m+100$ összeg – nullával egyenlő.
Ebből az $m=-\frac{5}{3}$ meghatározásáért 1 pontot, a keresett érintő egyenletének felírásáért pedig további 1 pontot kapjon.

6. c) **első megoldás**		
Az e egyenesnek és a k körnek nincs közös pontja, ha az $x^2+(mx)^2+4x-16\cdot mx+34=0$ egyenletnek nincs valós megoldása.	1 pont*	
Rendezve: $(m^2+1)x^2+(4-16m)x+34=0$.	1 pont*	
Ennek a másodfokú egyenletnek pontosan akkor nincs valós megoldása, ha a diszkriminánsa negatív.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$D=(4-16m)^2-136(m^2+1)=$	1 pont*	
$=120m^2-128m-120=8(15m^2-16m-15)$	1 pont*	
A $15m^2-16m-15=0$ egyenlet gyökei $-\frac{3}{5}$ és $\frac{5}{3}$.	1 pont	
Mivel az egyenletben a másodfokú tag együtthatója pozitív,	1 pont	*Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.*
ezért $15m^2-16m-15<0$ pontosan akkor teljesül, ha $-\frac{3}{5}<m<\frac{5}{3}$. A k körnek és az e egyenesnek nincs közös pontja, ha $m\in\left]-\frac{3}{5};\frac{5}{3}\right[$.	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A k kör sugara $\sqrt{34}$ egység, ezért k-nak pontosan akkor nincs közös pontja az e-vel, ha az egyenes a $C(-2;\ 8)$ ponttól $\sqrt{34}$ egységnél távolabb van.	2 pont	
Az e egyenes egyenlete $mx-y=0$, így (a pont és egyenes távolságának képletével) a C pont és az e egyenes távolsága: $\left\|\frac{-2m-8}{\sqrt{m^2+1}}\right\|$.	1 pont	
$\left\|\frac{-2m-8}{\sqrt{m^2+1}}\right\|>\sqrt{34}$	1 pont	
Négyzetre emelés után $\frac{4m^2+32m+64}{m^2+1}>34$, innen pedig $15m^2-16m-15<0$.	1 pont	

6. c) **második megoldás**		
Az $y = mx$ egyenletű egyenesek átmennek az origón. Először felírjuk az origón át a körhöz húzható két érintőegyenes egyenletét. Az érintési pontokat az origó és a kör középpontja által meghatározott szakasz, mint átmérő fölé írt Thalész-kör metszi ki a k körből.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A k kör középpontja $C(-2; 8)$. A Thalész-kör középpontja az OC szakasz felezőpontja: $K(-1; 4)$, sugara pedig az OK szakasz hossza, azaz $\sqrt{17}$ egység. A Thalész-kör egyenlete így $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 17$.	2 pont	
A két kör metszéspontjainak megállapításához megoldandó az alábbi egyenletrendszer. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-8)^2 = 34 \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 = 17 \end{cases}$	1 pont	
A két egyenletet kivonva egymásból: $2x + 3 - 8y + 48 = 17$, azaz $x = 4y - 17$.	1 pont	
Ezt az első egyenletbe visszaírva, majd a négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $17(y^2 - 8y + 15) = 0$.	1 pont	
Ennek az egyenletnek a gyökei 3 és 5, tehát a két érintési pont $(-5; 3)$ és $(3; 5)$.	1 pont	
Az origón és az egyik, illetve másik érintési ponton áthaladó egyenes meredeksége $-\frac{3}{5}$ és $\frac{5}{3}$.	1 pont	
 Az $y = mx$ egyenletű egyenesnek és a k körnek nincs közös pontja, ha $m \in \left]-\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right[$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. a)		
Dóri 20, Blanka és Csenge 25-25 figurát készített.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezt a számolást a b) feladat megoldásánál végzi el a vizsgázó.*
Két figurát $\binom{70}{2}$ (= 2415)-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).	1 pont	*A két figura kihúzásának sorrendjét is figyelembe véve:* $70 \cdot 69$ (= 4830).
Dóri két figurája $\binom{20}{2}$ (= 190), Blanka és Csenge két figurája rendre $\binom{25}{2}$ (= 300)-féleképpen választható ki,	1 pont	$20 \cdot 19$ (= 380), *illetve* $25 \cdot 24$ (= 600)
így $\binom{20}{2}+2\cdot\binom{25}{2}$ (= 790)-féleképpen választható ki úgy két figura, hogy mindkettőt ugyanaz a lány készítette (kedvező esetek száma).	1 pont	$20 \cdot 19 + 2 \cdot (25 \cdot 24)$ (= 1580)
Annak a valószínűsége, hogy a két kiválasztott figurát ugyanaz a lány készítette, $\dfrac{\binom{20}{2}+2\cdot\binom{25}{2}}{\binom{70}{2}} =$	1 pont	$\dfrac{20\cdot 19+2\cdot(25\cdot 24)}{70\cdot 69} \approx$
$\left(=\dfrac{158}{483}\right) \approx 0{,}327$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó visszatevéses mintavétellel dolgozik, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

7. b)		
A Blanka, Csenge és Dóri által készített karácsonyfa-figurák száma rendre 10, 15 és 6.	1 pont	
Összesen 31 karácsonyfa-figurát készítettek, ezért $\dfrac{10}{31} \approx 0{,}323$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott figurát éppen Blanka készítette.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. c) első megoldás		
A négyszög oldalainak cm-ben mért hosszát valamely körüljárási irányban jelölje e, f, g, h. Az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, ezért $e + g = f + h = 40$.	1 pont	
Feltehetjük, hogy $e = 23$, ekkor $g = 17$; valamint hogy $f > h$ (mert a számtani sorozat különbsége $d \neq 0$).	1 pont	
(Esetszétválasztást végzünk e és f nagyságviszonya alapján.) Ha $f > e$, akkor ($h < g$, és) a sorozat különbsége $d = e - g = 6$;	1 pont	
így f $(= e + 6) = 29$ és h $(= g - 6) = 11$.	1 pont	
Ha $f < e$, akkor ($g < h < f < e$, és) a sorozat különbségére $3d = e - g = 6$, innen $d = 2$.	1 pont	
h $(= g + 2) = 19$ és f $(= h + 2) = 21$.	1 pont	
A négyszög másik három oldala tehát 11, 17 és 29, illetve 17, 19 és 21 (cm) lehet. (Mindkét esetben létezik konvex négyszög.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. c) második megoldás		
Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a számtani sorozat növekvő. Ebben az esetben a 23 a sorozatnak a harmadik vagy negyedik tagja lehet (mert a sorozatnak biztosan két-két 20-nál kisebb, illetve nagyobb tagja van).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó azokat az eseteket is megvizsgálja, amikor a 23 a sorozat első, illetve második tagja.*
Ha a 23 a sorozatnak a harmadik tagja, akkor (a sorozat differenciáját d-vel jelölve) $(23 - 2d) + (23 - d) + 23 + (23 + d) = 80$.	1 pont	
Innen $92 - 2d = 80$, azaz $d = 6$.	1 pont	
Ha a 23 a sorozatnak a negyedik tagja, akkor $(23 - 3d) + (23 - 2d) + (23 - d) + 23 = 80$.	1 pont	
Innen $92 - 6d = 80$, azaz $d = 2$.	1 pont	
A négyszög másik három oldala tehát 11, 17 és 29, illetve 17, 19 és 21 (cm) lehet. (Mindkét esetben létezik konvex négyszög.)	1 pont	
Mivel $11 + 29 = 17 + 23$, illetve $17 + 23 = 19 + 21$, mindkét kapott négyszög valóban érintőnégyszög.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. a)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Ha G_1 csúcsainak száma n (n pozitív egész) és G_2 csúcsainak száma $2n$, akkor G_1 éleinek száma $n - 1$, G_2 éleinek száma pedig $2n - 1$, de $2(n - 1) \neq 2n - 1$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b) első megoldás		
Összesen $\binom{6}{2} = 15$ üzletkötés történt az előző hónapban,	1 pont	
ezek közül 4-et $\binom{15}{4} = 1365$-féleképpen lehet kiválasztani ellenőrzésre (összes eset száma).	1 pont	
Nem kedvezők azok az esetek, amelyekben mind a 4 ellenőrzésre kiválasztott üzletkötés a C, D, E és F üzletkötései közül kerül ki.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
C, D, E, F egymás között 6 üzletet kötött, ezek közül 4-et $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
A kedvező esetek száma: $\binom{15}{4} - \binom{6}{4} = 1350$,	1 pont	
így a kérdéses valószínűség $\frac{1350}{1365} = \frac{90}{91}$ (≈ 0,989).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. b) második megoldás		
Összesen $\binom{6}{2} = 15$ üzletkötés történt az előző hónapban,	1 pont	
ezek közül 4-et $\binom{15}{4} = 1365$-féleképpen lehet kiválasztani ellenőrzésre (összes eset száma).	1 pont	
Az üzletkötések között $\binom{4}{2} = 6$ olyan van, amelyben sem A, sem B nem volt érintett, és 9 olyan üzletkötés van, amelyben az A vagy a B érintett volt.	1 pont	

Ezért a 15 üzletkötés közül $\binom{9}{1}\binom{6}{3}+\binom{9}{2}\binom{6}{2}+\binom{9}{3}\binom{6}{1}+\binom{9}{4}\binom{6}{0}=1350$ különböző módon lehet 4-et ellenőrzésre úgy kiválasztani, hogy közöttük szerepeljen legalább egy az *A* vagy *B* üzletkötései közül (kedvező esetek száma).	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{1350}{1365}=\frac{90}{91}$ (≈ 0,989).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. b) harmadik megoldás		
Tekintsük a cégeket egy hatpontú (teljes) gráf pontjainak, a köztük történt üzletkötéseket pedig a gráf éleinek. Annak a valószínűségét kell kiszámítani, hogy a gráf élei közül 4-et kiválasztva a kiválasztott élek között lesz *A*-ból vagy *B*-ből induló él.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A hatpontú teljes gráfnak $\binom{6}{2}=15$ éle van,	1 pont	
ezek között $\binom{4}{2}=6$ olyan van, amelynek sem *A*, sem *B* nem végpontja (azaz 9 olyan él van, amelynek az *A* vagy a *B* végpontja).	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az első, második, harmadik, majd negyedik kiválasztott él egyik végpontja sem *A* vagy *B*, rendre $\frac{6}{15}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{4}{13}$, majd $\frac{3}{12}$.	1 pont	
A komplementer esemény valószínűsége ezek szorzata: $\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{91}$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség így $1-\frac{1}{91}=\frac{90}{91}$ (≈ 0,989).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. c)		
Vegyünk fel egy alkalmas derékszögű koordinátarendszert, amelyben legyen *U*(0; 0) és *P*(100; 0). Ekkor *Q*(100; 16) és *S*(50; 0) (a tengelyeken az egységeket méterben mérjük).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból vagy egy megfelelő ábrából derül ki.*
Az *U*, *Q* pontokon átmenő parabola egyenletét keressük, melynek a szimmetriatengelye az *y* tengely. Mivel a parabola tengelypontja az origó, azért egyenlete $y=cx^2$ alakú.	1 pont	

A parabolán rajta van a Q(100; 16) pont, tehát $16 = c \cdot 100^2$,	1 pont	
ahonnan $c = 0,0016 = \frac{1}{625}$, ezért a parabola egyenlete $y = \frac{x^2}{625}$.	1 pont	
A hirdetővászon által fedett $PQRS$ terület (ezt az $x \mapsto \frac{x^2}{625}$ másodfokú függvény [50; 100] intervallumon vett határozott integrálja adja meg): $\int_{50}^{100} \frac{x^2}{625} dx = \left[\frac{x^3}{1875} \right]_{50}^{100} =$	1 pont	
$= \frac{100^3 - 50^3}{1875} = 466\frac{2}{3}$.	1 pont	≈ 467
Ha 8% veszteséggel kell számolni, akkor $466\frac{2}{3} : 0,92 \approx 507$ m^2 vászonra lesz szükség.	1 pont	$467 : 0,92 \approx 508$ m^2
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó tanult tételként hivatkozik arra, hogy a parabolikus háromszög területe egyharmada a bennfoglaló téglalap területének, akkor ezért 3 pontot kapjon. További 3 pontot kapjon azért, ha az UPQ és az USR parabolikus háromszögek területének különbségeként határozza meg a PQRS területet.

9. a)		
A tanulmány szerint 10 parkolóőr esetén a bliccelők aránya $(25 - 10 \cdot 0,5 =)$ 20%,	1 pont	
a parkolóőrök alkalmazásának költsége pedig naponta $(330 \cdot 10 =)$ 3300 garas lenne.	1 pont	
Mivel az autósok $(100 - 20 =)$ 80 százaléka fizeti meg a parkolási díjat, ezért a parkolási díjakból származó napi bevétel: $15\,000 \cdot 0,8 \cdot 10 = 120\,000$ garas.	2 pont	
A parkolóőrök $(10 \cdot 200 =)$ 2000 autót ellenőriznek, ezek 20 százaléka bliccel, ezért a bliccelőktől származó napi bevétel: $2000 \cdot 0,2 \cdot 150 = 60\,000$ garas.	1 pont	
A napi nettó bevétel így $120\,000 + 60\,000 - 3300 = 176\,700$ garas.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. b) első megoldás		
A tanulmány szerint n fő parkolóőr alkalmazása esetén a bliccelők aránya $(25 - 0{,}5n)$ százalék $(0 \le n \le 50)$, a parkolóőrök alkalmazásának költsége pedig naponta $330n$ garas lenne ($n \in \mathbf{N}$).	1 pont	
A parkolási díjat a 15 000 főnek a $(75 + 0{,}5n)$ százaléka fizeti meg, az ebből származó bevétel tehát $15\,000 \cdot \frac{75+0{,}5n}{100} \cdot 10 = 112\,500 + 750n$ garas.	1 pont	
A parkolóőrök $200n$ számú ellenőrzést hajtanak végre, ennek $(25 - 0{,}5n)$ százalékában szabnak ki büntetést.	1 pont	
A büntetésből származó napi bevétel $200n \cdot \frac{25-0{,}5n}{100} \cdot 150 = 7500n - 150n^2$ garas.	1 pont	
A napi nettó bevétel $(112\,500 + 750n + 7500n - 150n^2 - 330n =)$ $-150n^2 + 7920n + 112\,500$ garas.	1 pont	
Az $n \mapsto -150n^2 + 7920n + 112\,500$ ($n \in \mathbf{R}$) másodfokú függvény deriváltfüggvénye $n \mapsto -300n + 7920$,	1 pont*	
tehát a függvény maximumhelye (a deriváltfüggvény zérushelye) a $\frac{7920}{300} = 26{,}4$.	1 pont*	
A napi nettó bevétel tehát 26 vagy 27 parkolóőr esetén lesz maximális.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
26 parkolóőr esetén a bevétel 217 020 garas, 27 parkolóőr esetén pedig 216 990 garas,	1 pont	*A parabola szimmetriatulajdonságára való hivatkozásért vagy egy megfelelő ábráért is jár a pont.*
így 26 parkolóőr esetében lesz a legnagyobb a napi nettó bevétel.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a függvény maximumhelyének megállapítása után (további indoklás nélkül) annak kerekítésével válaszol, akkor legfeljebb 9 pontot kaphat.

*2. A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az $n \mapsto an^2 + bn + c$ ($n \in \mathbf{R}$, $a \ne 0$) másodfokú függvény szélsőértéke $-\frac{b}{2a}$-nál van, tehát az $n \mapsto -150n^2 + 7920n + 112\,500$ ($n \in \mathbf{R}$) függvénynek maximuma van $-\frac{7920}{-2 \cdot 150} = \frac{132}{5} = 26{,}4$-nél.	2 pont	

*3. A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

$-150n^2+7920n+112\,500=$ $=-150(n^2-52{,}8n)+112\,500=$ $=-150[(n-26{,}4)^2-26{,}4^2]+112\,500=$ $=-150(n-26{,}4)^2+217\,044$, tehát a függvénynek $n = 26{,}4$ esetén van maximuma.	2 pont	

9. b) második megoldás		
n számú parkolóőr ($n \in \mathbf{N}$) alkalmazása esetén jelölje p_n a napi parkolási díjakból, b_n a napi bírságokból származó bevételt, k_n az őrök alkalmazásának napi költségét, f_n pedig a teljes napi nettó bevételt ($f_n = p_n + b_n - k_n$). Az f_n sorozat növekedési viszonyait vizsgáljuk ($n \le 50$ esetén).	1 pont	
$p_{n+1} - p_n = 750$, hiszen 0,5%-kal (75-tel) több lesz a díjfizető autós egy újabb parkolóőr alkalmazása esetén.	1 pont	
n számú parkolóőr alkalmazása esetén a megbírságolt autósok száma $200n\cdot\frac{25-0{,}5n}{100}=2n(25-0{,}5n)=$ $=50n-n^2$, ezért a bírságból származó bevétel $b_n=150(50n-n^2)=7500n-150n^2$.	1 pont	
$b_{n+1}-b_n=7500(n+1)-150(n+1)^2-7500n+150n^2=$ $=7350-300n$	1 pont	
$k_{n+1} - k_n = 330$, hiszen eggyel több parkolóőr alkalmazásának költségeit kell kifizetni.	1 pont	
Így $f_{n+1} - f_n = 750 + 7350 - 300n - 330 =$ $= 7770 - 300n$.	1 pont	
$f_{n+1} - f_n = 7770 - 300n > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $n<\frac{7770}{300}=25{,}9$ (vagyis $n \le 25$), $n > 25{,}9$ (vagyis $n \ge 26$) esetén pedig a különbség negatív.	1 pont	
Ez azt jelenti, hogy f_n sorozat először szigorúan monoton nő, aztán szigorúan monoton csökken.	1 pont	
A legnagyobb tagja f_{26}, mert $f_{26} - f_{25} > 0$, de $f_{27} - f_{26} < 0$.	1 pont	
Tehát a maximális napi bevételt 26 parkolóőr alkalmazásával érhetik el.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	