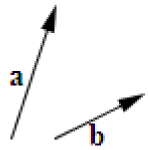
1. tétel

1. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 50°, a szög melletti befogója 7 cm. Mekkora a háromszög átfogója? *(4 pont)*



2. Adott az ábrán két vektor. Rajzolja meg a **–b**, a **2b** és az **a – 2b** vektorokat! *(6 pont)*

3. Egy 32 lapos magyar kártyában 8 piros lap van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyet kihúzva az éppen piros lesz? *(5 pont)*

4. Oldja meg a következő egyenletet! *(12 pont)*

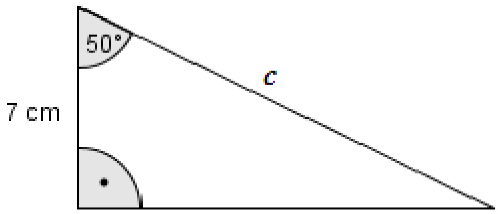
$$(3x-1)^2-2(5-3x)=(3x-2)(3x+2)-x$$

5. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyiknek minden számjegye páros?*(8 pont)*

6. Egy mértani sorozat első tagja 80, első három tagjának összege 140. Mennyi a sorozat második és harmadik tagja? *(10 pont)*

Megoldás:

1.



$\cos 50° = \dfrac{7}{c}$ 2 pont

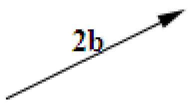
$c = \dfrac{7}{\cos 50°}$ 1 pont

$c \approx 10{,}9$ cm <u>1 pont</u>

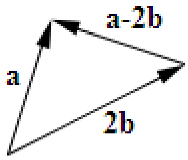
4 pont

2.

–b helyes megrajzolása: hossza **b**-vel megegyezik, **b**-vel párhuzamos, iránya ellentétes. 1 pont



2b helyes megrajzolása: hossza **b**-nek kétszerese, **b**-vel párhuzamos, egyirányúak. 2 pont



a – 2b helyes megrajzolása: a két vektort közös kezdőpontból felmérjük, a két végpontot összekötjük, **a – 2b** a kisebbítendő felé mutat. <u>3 pont</u>

6 pont

3. Kedvező kimenetelek száma: $k = 8$. 1 pont

Összes eset száma: $n = 32$. 1 pont

A valószínűség a kedvező és az összes kimenetel számának hányadosa: $p = \frac{k}{n}$. 2 pont

$p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$. 1 pont

Megjegyzés: A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.

5 pont

4. $(3x-1)^2 - 2(5-3x) = (3x-2)(3x+2) - x$

$(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$ 2 pont

$-2(5-3x) = -10 + 6x$ 2 pont

$(3x-2)(3x+2) = 9x^2 - 4$ 2 pont

A fentieket behelyettesítve: $9x^2 - 6x + 1 - 10 + 6x = 9x^2 - 4 - x$.
Rendezve, összevonva: $-9 = -4 - x$. 2 pont

A megoldás: $x = 5$. 2 pont

Ellenőrzés: $14^2 - 2\cdot(-10) = 13\cdot 17 - 5$
$216 = 216$ 2 pont

12 pont

5.
I. megoldás:

Ötféle páros számjegy van: 0; 2; 4; 6; 8. 1 pont

1. helyre a nulla kivételével bármelyik kerülhet: 4 lehetőség. 2 pont

2. helyre bármelyik kerülhet: 5 lehetőség. 2 pont

3. helyre bármelyik kerülhet: 5 lehetőség. 1 pont

Összesen $4 \cdot 5 \cdot 5$ lehetőség van. 1 pont

A megfelelő háromjegyű számok száma 100. 1 pont

8 pont

II. megoldás:

Ötféle páros számjegy van: 0; 2; 4; 6; 8. 1 pont

Komplementer módszerrel számolunk, azaz az összes lehetőségből kivonjuk a nullával kezdődő háromjegyűek számát. 1 pont

Az összes lehetőség száma 5^3. 2 pont

A nullával kezdődők száma 5^2. 2 pont

Különbségük: $5^3 - 5^2$. 1 pont

A megfelelő háromjegyű számok száma 100. 1 pont

8 pont

6. $80 + a_2 + a_3 = 140$ 1 pont

$a_1 q + a_1 q^2 = 60$, azaz $80q + 80q^2 = 60$. 1 pont

$4q^2 + 4q - 3 = 0$ 2 pont

$q = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8}$ 1 pont

$q_1 = \frac{1}{2}$ 1 pont

$q_2 = -\frac{3}{2}$ 1 pont

Az első esetben a sorozat második tagja 40, harmadik tagja 20. 1 pont

A második esetben a sorozat második tagja –120, harmadik tagja 180. 1 pont

Ellenőrzés. 1 pont

10 pont

2. tétel

1. Definiálja tetszőleges nagyságú szög tangensét! *(4 pont)*

2. Végezze el a következő műveleteket és a végeredményt normálalakban adja meg! Számológépet ne használjon! *(4 pont)*

$$\frac{8{,}5\cdot 10^{7}\cdot 8\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{2}}$$

3. Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a valós számokon értelmezett $x \mapsto x^2$ függvényt!
Adja meg a függvény értékkészletét, zérushelyét, és jellemezze a függvényt növekedés, illetve fogyás szempontjából! *(7 pont)*

4. Anikó a múlt héten hétfőn, pénteken és vasárnap 3-3 órát, kedden 7 órát, szerdán és csütörtökön 5-5 órát, szombaton 5,5 órát tanult. Hány órát tanult naponta átlagosan? Mennyi a tanulással töltött órák módusza, mediánja és terjedelme? *(9 pont)*

5. Adott három halmaz:

A = {2; 4; 6; 8}
B = {egyjegyű prímszámok}
C = {5-tel osztható egyjegyű pozitív egész számok}

Határozza meg a következő halmazok elemeit! *(9 pont)*

$A \cup B$
$A \cap C$
$A \cap (B \setminus C)$

6. a) Határozza meg az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör középpontjának koordinátáit és sugarát!
b) Számolja ki az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör és a $2x + y = 10$ egyenletű egyenes metszéspontjainak koordinátáit! *(12 pont)*

Megoldás:

1.
I. megoldás:

Egy szög tangense egyenlő a szög szinuszának és koszinuszának hányadosával
$\left(\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$, 2 pont

ahol $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, 1 pont*

$k \in \mathbf{Z}$. 1 pont*
4 pont

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a $\cos\alpha \neq 0$ *feltételt megadja, de azt nem tudja megoldani, akkor a csillaggal jelölt 2 pontból 1-et kapjon.*

II. megoldás:

Az α szög tangense a koordinátasíkon annak a pontnak a második koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott **i** egységvektor egyenese az origó körüli egységsugarú kör (1; 0) pontjához húzott érintőből kimetsz. 2 pont

A metszéspont akkor létezik, ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, 1 pont*

ahol $k \in \mathbf{Z}$. 1 pont*

4 pont

Megjegyzés: Ha a vizsgázó kimondja, hogy azokra a szögekre nincs értelmezve a $\operatorname{tg}\alpha$, *amikor a két egyenes párhuzamos, de az α szöget nem tudja megadni, akkor a csillaggal jelölt 2 pontból 1-et kapjon.*

2. $\frac{8{,}5\cdot 10^{7}\cdot 8\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{2}} = 17\cdot\frac{10^{7}\cdot 10^{-2}}{10^{2}} =$ 1 pont

$= 17\cdot\frac{10^{5}}{10^{2}} =$ 1 pont

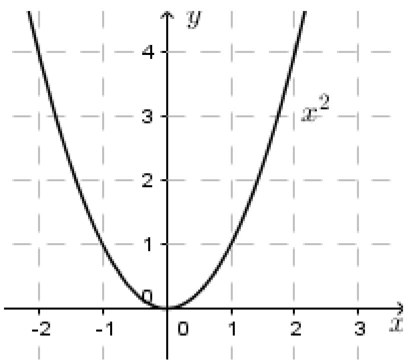
$= 17\cdot 10^{3} =$ 1 pont

$= 1{,}7\cdot 10^{4}$ 1 pont

4 pont

Megjegyzés: Kevésbé részletezett, jól elvégzett számításért is jár a 4 pont.

3.



Jó grafikon. 2 pont

Értékkészlet: [0; ∞[. 2 pont

Zérushelye: $x = 0$. 1 pont

(Szigorúan) monoton növekszik:]0; ∞[. 1 pont*

(Szigorúan) monoton csökken:]–∞; 0[. 1 pont*

7 pont

Megjegyzés: A vizsgázó a csillaggal jelzett pontokat abban az esetben is kapja meg, ha a zárt intervallumokat ad meg.

4. Átlag = $\frac{3\cdot 3+7+2\cdot 5+5{,}5}{7}=$ 1 pont

$=\frac{31{,}5}{7}=$ 1 pont

= 4,5 óra. 1 pont

Módusz: 3 óra. 2 pont*

Medián: 5 óra. 2 pont*

Terjedelem: 4 óra. 2 pont*

9 pont

Megjegyzés: Ha az utolsó három érték valamelyike hibás, de a vizsgázó a szükséges fogalommal tisztában van, akkor az egyes esetekben 2 helyett kapjon 1 pontot.

5. B = {2; 3; 5; 7} 1 pont

C = {5} 1 pont

$A\cup B$ = {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8} 2 pont

$A\cap C=\varnothing$ 2 pont

$B\setminus C$ = {2; 3; 7} 2 pont

$A\cap(B\setminus C)$ = {2} 1 pont

9 pont

6.

I. megoldás

a) A középpont koordinátái: (0; 0), a sugár 5 egység. 2 pont

b) Meg kell oldani a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=25\\2x+y&=10\end{aligned}\right\}$ 1 pont

$y=-2x+10$ 1 pont

$x^2+(-2x+10)^2=25$ 1 pont

$x^2+4x^2-40x+100=25$ 1 pont

$5x^2-40x+75=0$ 1 pont

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1500}}{10} =$$ 1 pont

$$= \frac{40 \pm 10}{10}$$ 1 pont

$x_1 = 5$ és $x_2 = 3$ 1 pont

$y_1 = 0$ és $y_2 = 4$ 1 pont

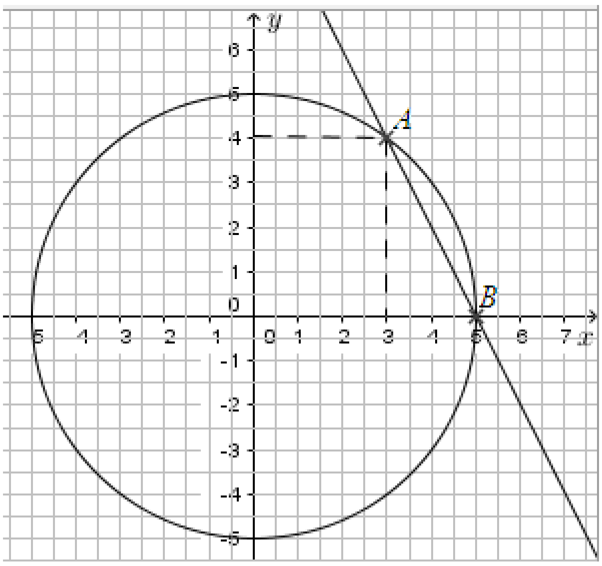
Tehát a metszéspontok koordinátái: (5; 0) és (3; 4). 1 pont

12 pont

II. megoldás:

a) A középpont koordinátái: (0; 0), a sugár 5 egység. 2 pont

b)



Az $x^2 + y^2 = 25$ kör ábrázolása. 2 pont

A $2x + y = 10$ egyenes ábrázolása. 2 pont

A metszéspontok koordinátáinak leolvasása:

A (3; 4) 2 pont

B (5; 0) 2 pont

Ellenőrzés behelyettesítéssel. 2 pont

12 pont

3. tétel

1. Mit nevezünk paralelogrammának? Sorolja fel a paralelogrammának azokat a tulajdonságait, amelyek az oldalaira, a szögeire és az átlóira vonatkoznak! *(6 pont)*

2. Egy hatpontú gráfban öt pont fokszámát ismerjük: 1; 2; 2; 3; 4. Mennyi a 6. pont fokszáma, ha tudjuk, hogy a gráfban összesen 7 él van berajzolva? *(4 pont)*

3. Egy háromoldalú egyenes hasáb minden éle 6 cm. Mekkora a felszíne? *(5 pont)*

4. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! *(10 pont)*

$$\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$$

5. Egy számtani sorozat első tagja –4, harmadik tagja 2. Számítsa ki a sorozat 100. tagját és az első 100 tag összegét! *(10 pont)*

6. Egy dobozban 5 piros, 1 kék és 1 sárga színű golyó van, és az azonos színűeket nem különböztetjük meg egymástól.

a) Hányféleképpen lehet sorba rakni a hét golyót? *(3 pont)*

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha egymás után három golyót kiválasztunk, azok egyforma színűek lesznek? *(7 pont)*

Megoldás:

1. A paralelogramma olyan négyszög, melynek két-két szemközti oldala párhuzamos. 1 pont

A paralelogramma két-két szemközti oldala egyenlő. 1 pont

A paralelogramma szemközti szögei egyenlők. 1 pont

A paralelogramma bármely két szomszédos szögének összege 180°. 1 pont

A paralelogramma belső szögeinek összege 360°. 1 pont

A paralelogramma átlói felezik egymást. 1 pont

6 pont

2. 7 él esetén a fokszámok összege 14. 2 pont

A megadott fokszámok összege 12. 1 pont

A 6. pont fokszáma 2. 1 pont

4 pont

3. Az alaplap háromszög területe: $t_1 = \frac{6^2 \cdot \sin 60°}{2} = 9\sqrt{3} \approx 15{,}59$ (cm^2). 2 pont

Egy oldallap területe: $t_2 = 6 \cdot 6 = 36$ (cm^2). 1 pont

A hasáb felszíne: $A = 2t_1 + 3t_2 = 18\sqrt{3} + 108 \approx$ 1 pont

$\approx 139{,}2$ cm^2. 1 pont

5 pont

4. Az értelmezési tartomány:]0; ∞[. 1 pont*

A logaritmus azonossága szerint: $\log_3 x(x+2) = 1$. 2 pont

Ebből következik, hogy $x(x+2) = 3$. 2 pont

A másodfokú egyenlet: $x^2 + 2x - 3 = 0$. 1 pont

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ 2 pont

$x_1 = 1$, ami megoldása az eredeti egyenletnek. 1 pont

$x_2 = -3$, ami nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért nem megoldás. 1 pont

10 pont

Megjegyzés: A csillaggal jelölt 1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ellenőrzéssel dönti el, hogy melyik megoldás jó.

5. $a_1 = -4$ és $a_3 = 2$

Az $a_n = a_1 + (n-1)d$ képletbe behelyettesítve: 1 pont

$2 = -4 + 2d$, ebből 1 pont

$d = 3$. 2 pont

$a_{100} = -4 + 99 \cdot 3 = 293$ 2 pont

Az $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ képletbe behelyettesítve: 1 pont

$S_{100} = \frac{-4 + 293}{2} \cdot 100$, ebből 2 pont

$S_{100} = 14\,450$. 1 pont

10 pont

6. a)
I. megoldás:

7!-féleképpen lehetne sorba rakni őket, ha mind különbözők lennének, 1 pont

de az 5 piros nem különböztethető meg egymástól,
ezért az összes lehetséges sorrend: $\frac{7!}{5!}=$ 1 pont

$= 42$. 1 pont

3 pont

II. megoldás:

A kék és sárga golyó elhelyezkedése egyértelműen megadja a piros golyók helyét, 1 pont

ezért a megfelelő sorrendek száma $7 \cdot 6 =$ 1 pont

$= 42$. 1 pont

3 pont

b)
I. megoldás:

A három egyforma színű csak piros lehet. 1 pont

Kedvező eset akkor következik be, ha a három kihúzott piros golyót az 5 pirosból választjuk ki, 1 pont

ezért e lehetőségek száma $\binom{5}{3}$. 1 pont

Összesen 7 golyóból kell kiválasztani hármat, ezért az összes eset száma $\binom{7}{3}$. 1 pont

A valószínűség a kedvező és az összes eset hányadosa, 1 pont

ezért $p=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}}=$ 1 pont

$=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$. 1 pont

7 pont

II. megoldás

A három egyforma színű csak piros lehet. 1 pont

Kedvező eset akkor következik be, ha a kék és a sárga az utolsó négy hely valamelyikén lesz, 1 pont

így e lehetőségek száma $4 \cdot 3 = 12$. 1 pont

Az összes eset azt jelenti, hogy a kék és a sárga bárhová kerülhet, 1 pont

ezért e lehetőségek száma $7 \cdot 6 = 42$. 1 pont

A valószínűség a kedvező és az összes eset hányadosa, 1 pont

ezért $p = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$. 1 pont

7 pont